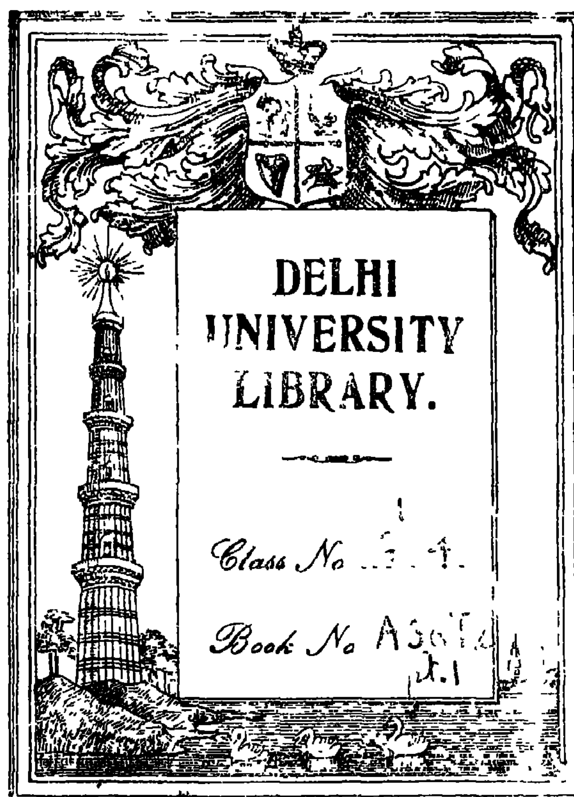

DELHI
UNIVERSITY
LIBRARY.
Class No
Book No



سلسلۂ مطبوعات جامعۂ عثمانیہ نصابیات علمیہ

تعمیروں کا نظریہ اور تجویز

(حصۂ اول)

مُصنّفۂ

ایلوارٹ ایس۔ اینڈریوز

بی۔ایس سی (لندن)۔ ایم' آئی' سی' ای۔ ایم' آئی' اسٹرکٹ' ای' وغیرہ۔

مترجمہ

مولوی ضیاءالدین صاحب انصاری ایم۔اے (عثمانیہ) بی۔ایس سی آنرز (مانچسٹر)

اسسٹنٹ انجینئر سررشتۂ تعمیرات سرکار عالی

۱۳۵۷ھ م ۱۳۴۷ف م ۱۹۳۸ء

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

تعمیروں کا نظریہ اور تجویز

حصہ اوّل

باب ۱ تا باب ۱۰

فہرست مضامین

تعمیروں کا نظریہ اور تجویز

حصۂ اول

پہلا باب

صفحہ

دوسرا باب

تیسرا باب

چوتھا باب



صفحہ

پانچواں باب

چھٹا باب

صفحہ

ساتواں باب

آٹھواں باب

نواں باب

ثابت اور مسلسل شہتیر

دسواں باب

شہتیروں میں جزی زوروں کی تقسیم

بسم اللہ الرحمن الرحیم

تعمیر کا نظریہ اور تجویز

نوٹ۔ جن حصّوں پر چلیپے کا نشان لگایا گیا ہے پہلی بار مطالعہ کرتے وقت ان کو چھوڑ دیا جائے۔

پہلا باب

فساد، زور اور لچک

فساد کی تعریف یہ کی جا سکتی ہے کہ یہ کسی جسم کی شکل یا صورت کی تبدیلی ہے جو بیرونی قوتوں کے عمل سے پیدا ہو۔

زور کی تعریف یہ ہوگی کہ یہ کسی جسم کے ذرّات کے درمیان وہ قوت ہے جو فساد کی وجہ سے پیدا ہو۔

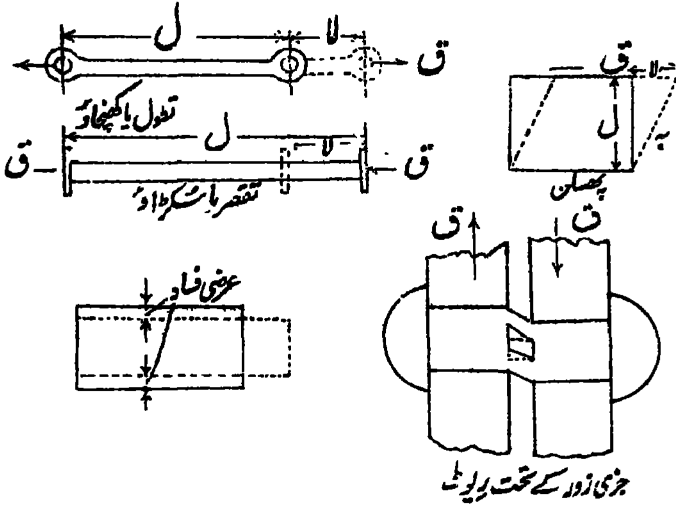
لچکدار جسم وہ ہے جس میں ایک خاص فساد سے ایک معیّن زور پیدا ہو اور زور اور فساد اِس بیرونی قوت کی مدت پر منحصر نہ ہوں جس سے یہ زور اور فساد پیدا ہوئے اور قوت کے ہٹ جانے پر زور اور فساد غائب ہو جائیں۔ جس جسم میں قوت کے ہٹ جانے پر فساد غائب نہ ہو جائے اُس کے متعلق کہا جاتا ہے کہ اس میں ایک مستقل فساد پیدا ہو گیا ہے اور اس طرح کے جسم کو پیکر پذیر کہا جاتا ہے۔

اگر کوئی لچکدار جسم تعادل میں ہو تو ضرور ہے کہ اس کے کسی دیے ہوئے حصے پر عمل کرنے والے زور اس حصے پر عمل کرانے والی تمام بیرونی قوتوں کی تعدیل کریں۔ بیرونی قوتیں لگانے سے جسم میں فساد شروع ہوتا ہے اور یہ فساد بڑھتا جاتا ہے یہاں تک کہ اس سے پیدا ہونے والے زوروں کی مقدار اتنی ہو جائے کہ بیرونی قوتوں کی تعدیل کر سکیں۔

تعمیر کے اغراض کے لیے کسی شے کے بکار آمد ہونے کے لیے ضروری ہے کہ اس پر جو زور ڈالے جائینگے اُن کی حدود کے اندر وہ لچک دار رہے۔ اکثر ٹھوس اشیا ایک حد تک لچکدار ہوتی ہیں اور فساد ایک خاص حد سے بڑھ جائے تو پیکر پذیر ہو جاتی ہیں۔

ھوک کا قانون ــــ جو ھوک نے ۱۶۷۶ء میں معلوم کیا۔ یہ اس امر کو بیان کرتا ہے کہ لچکدار جسم میں فساد زور کے متناسب ہوتا ہے۔ اس طرح اگر ایک سلاخ کے طول میں ایک خاص کھنچاؤ پیدا کرنے کے لیے ایک خاص وزن درکار ہو تو اس سے دوگنا کھنچاؤ پیدا کرنے کے لیے اس قانون کے بموجب اس سے دوگنا وزن درکار ہوگا۔ ایک شہتیر میں ایک خاص انصراف پیدا کرنے کے لیے ایک خاص وزن درکار ہو تو اس سے دوگنا انصراف پیدا کرنے کے لیے اس سے دوگنا وزن درکار ہوگا۔

فساد اور زور کی قسمیں۔ فسادوں کی تین قسمیں کی جا سکتی ہیں۔ (۱) تطول یا کھنچاؤ (۲) تقصر یا سکڑاؤ (۳) پھسلن۔ ان فسادوں کے تناظر زور یہ ہونگے (۱) تنشی زور (۲) فشاری زور (۳) جنزی زور۔



شکل ۱۔ فساد کی قسمیں

اگر کوئی جسم ان میں سے صرف ایک کے زیر عمل ہو تو کہا جاتا ہے کہ سادہ فساد کی حالت میں ہے۔ اور اگر ایک سے زیادہ کے زیر عمل ہو تو کہا جاتا ہے کہ مخلوط فساد کی حالت میں ہے۔

سادہ فسادوں کی مثالیں یہ ہیں:۔ بندھن سلاخ۔ ستون جس پر بوجھ مرکزی ہو۔ ریوٹ[1]۔ مخلوط فساد کی حالت کے جسم کی بہترین مثال شہتیر ہے جس میں فسادوں کی تمام قسمیں پائی جاتی ہیں جیسا کہ آگے چل کر دکھایا جائیگا۔

زور کی حدت۔ ایک زیرِ فساد جسم کی تراش میں نقطہ لا پر ایک چھوٹے رقبہ ب کا تصور کرو۔ اگر اس چھوٹے رقبے پر عمل کرنے والی تمام سالماتی قوتوں کا حاصل ح ہو تو ح/ب نقطہ لا پر زور کی حدت کہلائیگا۔ جو اجسام پیچیدہ فساد کے تحت ہوں اُن میں زور کی حدت، تراش کے مختلف نقاط پر

[1] ریوٹ Rivet

مختلف ہوگی۔ اور جو سادہ فساد کے تحت ہوں اُن میں تراش کے ہر نقطے پر زور وہی ہوگا اور اس طرح اگر پوری تراش کا رقبہ ب ہو اور پوری تراش پر عمل کرنے والی مجموعی قوت ق ہو تو زور کی حدت $\frac{ق}{ب}$ ہوگی۔ آیندہ "زور" سے ہماری مراد "زور کی حدت" ہوگی اِلّا اس کے کہ اس کے خلاف صراحت کی گئی ہو۔

اکائی کا فساد ۔ اکائی کے فساد سے مراد شے کے اکائی طول کا فساد ہے۔ تطول اور تقصر کی صورت میں مجموعی فساد جسم کے اصلی طول کے تناسب ہوتا ہے۔ مثلاً ایک ہی بوجھ کے تحت ۲ فٹ لمبی سلاخ انٹ لمبی سلاخ سے دوگنا کھنچیگی۔ شکل ۱ میں اگر تناؤ اور فشار کی سلاخوں کا طول فساد سے پہلے ل ہو اور تطول یا تقصر لا ہو تو اکائی کا فساد $\frac{لا}{ل}$ ہے۔

پھسل فساد کی صورت میں جسم کا طول نہیں بدلتا بلکہ زاویہ بدلتا ہے اور زاویے کی یہ تبدیلی عہ، اکائی کے فساد کا ناپ ہے۔ اگر یہ زاویہ چھوٹا ہو، جیسا کہ اشیائے تعمیر میں ہمیشہ ہوگا، تو یہ تقریباً $\frac{لا}{ل}$ کے مساوی ہوگا جہاں لا اور ل وہ مقداریں ہیں جو شکل میں دکھائی گئی ہیں۔

پوائی سن[1] کی نسبت۔ عرضی فساد ۔ جب کسی جسم کو کھینچا یا بھینچا جاتا ہے تو ساتھ ہی ایک "عرضی فساد" واقع ہوتا ہے جو جسم کے حجم کی تبدیلی کو روکنے کا تقاضا رکھتا ہے۔ عرضی فساد کی مقدار طولی فساد سے ایک خاص نسبت رکھتی ہے۔

یہ نسبت = $\frac{\text{عرضی فساد}}{\text{طولی فساد}}$ = عا جو اکثر مادوں کے لیے $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{4}$ کے درمیان ہوتا ہے اور "پوائی سن کی نسبت" کہلاتا ہے۔

[1] Poisson

لچک کے ماہرین کی ایک جماعت کا خیال ہے کہ اس نسبت عا کی قیمت $\frac{1}{4}$ ہونی چاہیے، لیکن تجربات سے اس کی پوری تصدیق نہیں ہوتی اگرچہ کہ بعض اشیا کے لیے یہ بہت قریب صحیح ہے۔ اس نسبت کو بالراست ناپنا مشکل ہے۔ اس کی قیمت معلوم کرنے کا بہترین طریقہ یہی ہے کہ جز اور تناؤ کے لچک کے مقیاسوں سے بالواسطہ حاصل کریں جس کا طریقہ آگے چل کر سمجھایا جائیگا۔

زور اور فساد کے نقشے ۔ اگر کسی شے کا تناؤ یا فشار میں

امتحان کیا جائے اور ہر زور پر فساد کو ناپا جائے اور ایک نقشہ میں ان فسادوں کو زوروں کے بالمقابل ترسیم کیا جائے تو جو نقشہ حاصل ہوگا اُس کو "زور اور فساد کا نقشہ" کہا جاتا ہے۔ اگر شے مذکور ھوک کے قانون کی پابندی کرتی ہو تو یہ نقشہ ایک خطِ مستقیم ہوگا۔ اکثر دھاتوں کے لیئے زور اور فساد کا نقشہ، خطِ مستقیم ایک خاص نقطے تک ہوگا جس کو "لچک کی حد" کہتے ہیں جس کے بعد فساد، زور کی بہ نسبت زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے یہاں تک کہ ایک نقطہ آتا ہے جس کو نقطۂ مغلوبیت کہتے ہیں جب کہ فساد میں یکایک بڑا اضافہ واقع ہوتا ہے۔ نقطۂ مغلوبیت کے بعد دھات ایک پیکر پذیر حالت میں ہوتی ہے اور فساد تیزی سے بڑھتے رہتے ہیں یہاں تک کہ شکستگی واقع ہوتی ہے۔

شکل عـلا میں ایسے نرم فولاد کے جو کہ تعمیروں کے کاموں کے لیے موزوں ہے ایک تنشی نمونے کے زور اور فساد کا نقشہ دکھایا گیا ہے۔ نقشے کا حصہ اب ایک خطِ مستقیم ہے اور اُس عرصے کو تعبیر کرتا ہے جس میں شے ھوک کے قانون کی پابندی کرتی ہے۔ نقطہ ج نقطۂ مغلوبیت ہے۔ اس پر فساد اِس حد تک بڑھتا ہے کہ نقشے کے پہلے حصے کو دوبارہ ایک بہت چھوٹے پیمانے پر کھینچا گیا۔

یہ حصہ ا ب ج سے دکھایا گیا ہے۔ اس کے بعد فساد نقشے میں دکھائے ہوئے طریقہ پر بڑھتا رہتا ہے یہاں تک کہ نقطہ د آتا ہے۔ ج اور د کے درمیان منحنی تقریباً ایک مکانی ہے۔ نقطہ د پر زور کی اعظم قیمت ہوتی ہے۔ اس کے بعد نمونہ ایک خاص مقام پر پتلا پڑ جاتا ہے اور کھنچ جاتا ہے اور اگر زور قائم رہے تو آخر کار ٹوٹ جاتا ہے۔ حصہ د ع جو نقطہ دار دکھایا گیا ہے فساد کے اُس بڑھنے کو تعبیر کرتا ہے جس کے دَوران میں زور بظاہر گھٹتا ہے۔ یہ گھٹاؤ صرف ظاہری ہے کیونکہ اس عرصے میں نمونے کا رقبہ چھوٹا ہو جاتا ہے۔ اس طرح بوجھ کو گھٹا کر زور کو پھر بھی وہی رکھا جا سکتا ہے۔ عملاً بوجھ کو اس طرح گھٹانا بہت مشکل ہے کہ رقبے کے گھٹاؤ کا ساتھ دے سکے۔ اس وجہ سے نقشے کا یہ اخیر حصہ بہت ہی شاذ صحیح ہوتا ہے اور نیز عملی نقطۂ نظر سے اس کی کوئی اہمیت بھی نہیں۔

نقطۂ شکستگی پر نمونے کا کھنچ جانا شکل میں دکھایا گیا ہے۔ امتحان سے پہلے دستور ہے کہ نمونے کے طول میں مساوی فاصلوں سے مرکز سنبہ کے نشان لگائے جائیں۔ شکستگی کے بعد ان نشانات کے باہمی فاصلوں سے معلوم ہوتا ہے کہ طول میں مختلف نقاط پر تطول کی تقسیم کیا ہوتی ہے۔ شکل میں اس طرح کے چار نقاط ا، ب، ج، د دکھائے گئے ہیں۔ سب سے زیادہ تطول نقطۂ شکستگی پر واقع ہوتا ہے۔ اس طرح ایک چھوٹے طول کے نمونے میں فی صدی مجموعی تطول بڑے طول کے نمونوں سے زیادہ ہوگا۔ تطول پر نمونے کے طول کے اثر کے متعلق مکمل معلومات کے لیے قارئین پروفیسر اَنون[1] کے مضمون کا مطالعہ کریں (روئداد انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز جلد ۱۵۵)۔

تعمیروں کے کاموں کے لیے عموماً یہ تخصیص کی جاتی ہے کہ فولاد کی انتہائی یا اعظم تنشی مضبوطی ۲۸ تا ۳۳ ٹن فی مربع انچ ہو اور اس کے ۸ انچ کے طول میں ۲۰ فی صدی کا تطول ہو۔ ایک معین تطول کی تخصیص کی غایت

[1] Professor Unwin

اعظم زور
نقطہ شکستگی ع
مقامی طول
مجموعی طول
نقطہ مغلوبیت
لچک کی حد
زور فی مربع انچ ٹنوں میں
فساد فی انچ طول
شکستہ حصہ

نرم فولاد

فساد فی صد
پچکاؤ
تناؤ
زور فی مربع انچ
ڈھلا لوہا

شکل ۲۔ زور و فساد کے نقشے

یہ ہے کہ فولاد میں تمدد کافی ہو۔ متمدد فولاد بالعموم پھُوٹک نہیں ہوتا اگرچہ چند استثنائی صورتوں میں دیکھنے میں آیا ہے کہ ایک فولاد تمدد کے معمولی امتحانات میں پورا اُترا اور پھر بھی اس کی شکستگی بالکل پھوٹک شے کی طرح ہوئی۔ اسی وجہ سے حال میں بعض ماہرین نے ضرب کا امتحان استعمال کیا ہے اور معلوم ہوتا ہے کہ اس طریقے سے عمدہ نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

نرم فولاد کے لیے فشار اور جز کے زور اور فساد کے نقشے تناؤ کے نقشے سے بہت مشابہ ہوتے ہیں۔ فشار میں پورے نقشے کا حاصل کرنا مشکل ہے کیونکہ ناکارگی جھکاؤ کی وجہ سے واقع ہوتی ہے سوائے اُن صورتوں کے جن میں طول بہت چھوٹا ہو اور طول چھوٹا ہو تو فسادوں کا ناپنا مشکل ہوتا ہے۔ اور جز میں امتحان مروڑ کے ذریعے کیا جاتا ہے کیونکہ دوسرے طریقے سے خماؤ کے اثرات سے بچنا تقریباً ناممکن ہے۔ مروڑ میں جزی زور یکساں نہیں ہوتا جس کی وجہ سے گول سلاخ میں سطح کے قریب کا مادّہ نقطۂ مغلوبیت کو مرکز پر کے مادے سے پہلے پہنچتا ہے اور اس کی وجہ سے ظاہری نقطۂ مغلوبیت اصلی سے زیادہ حاصل ہوتا ہے۔ آگے چل کر معلوم ہوگا کہ شہتیر کے ذریعے تناؤ یا فشار کا امتحان کیا جائے تو اس میں بھی یہی ہوتا ہے۔

لچک کی حد کی اہمیت کو انجینیری تعمیروں کے جوزوں نے بڑی حد تک نظرانداز کیا ہے لیکن چونکہ جس نظریے پر شہتیروں کی مضبوطی کے اکثر ضابطوں کی بنا ہے اس میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ زور فساد کے متناسب ہے اس لیے یہ یاد رہے کہ ہمارے حسابات اسی وقت تک صحیح ہونگے جب تک کہ ھوک کا قانون صحیح ہو۔ اس سے ظاہر ہے کہ مادے کی لچک کی حد ایک بڑی اہم مقدار ہے۔ ہم اس مسئلے سے عملی زوروں کی بحث میں مزید بحث کرینگے۔ (باب ۲)۔

لچک کی حد اور نقطۂ مغلوبیت کے درمیان خلط ملط۔ تجارتی آزمائشوں میں یہ بات بہت عام ہے کہ فسادوں کی پیمائش کے لیے کوئی صحت والے ذرائع استعمال نہیں کیے جاتے (فسادوں کی پیمائش کے آلات امتداد پیما کہلاتے ہیں۔ ان آلات کا اور آزمائش کی مشینوں کا بیان اس کتاب کی وسعت سے باہر ہے[1]) مشین کے گز پر بوجھ کو باہر کی طرف حرکت دی جاتی ہے یہاں تک کہ گز یکایک اپنی روکوں پر گر پڑتا ہے۔ گز کا یہ گر پڑنا اُس وقت واقع ہوتا ہے جب کہ نقطۂ مغلوبیت واقع ہو لیکن بہت لوگ اس کو لچک کی حد کہتے ہیں۔ شکل ۲ء۱ کے نقشے سے معلوم ہوگا کہ تنشی آزمائش میں اس سے کوئی بڑی غلطی واقع نہیں ہوتی لیکن آڑے خماؤ میں یہ فرق زیادہ واضح ہوتا ہے اور اس سے خلط ملط واقع ہوتا ہے۔ ہم اس نکتے سے شہتیروں کے سلسلے میں باب ۶ صفحہ ۲۲۷ پر مزید بحث کرینگے۔

ڈھلے لوہے کے لیے زور اور فساد کے نقشے۔

ڈھلا لوہا بطور ایک مسالا تعمیر کے باستثنا فشاری ارکان یا داب روکوں کے تقریباً متروک ہوگیا ہے۔ ڈھلے لوہے کی مضبوطی بڑی حد تک اس کی مختلف ترکیبوں پر منحصر ہے۔ اس کی تنشی مضبوطی فشاری مضبوطی سے خاصی کم ہوتی ہے۔ شکل ۲ء۱ میں تناؤ اور فشار دونوں کے "زور اور فساد کے نقشے" دکھائے گئے ہیں۔ ان کو دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ تناؤ میں فساد در اصل زور کے کبھی بھی متناسب نہیں ہوتا لیکن فشار میں زور اور فساد تقریباً ۸ ٹن فی مربع انچ کے زور تک تقریباً متناسب ہوتے ہیں۔ شکل میں فشار کا منحنی مکمل نہیں کیا گیا کیونکہ جھکاؤ واقع

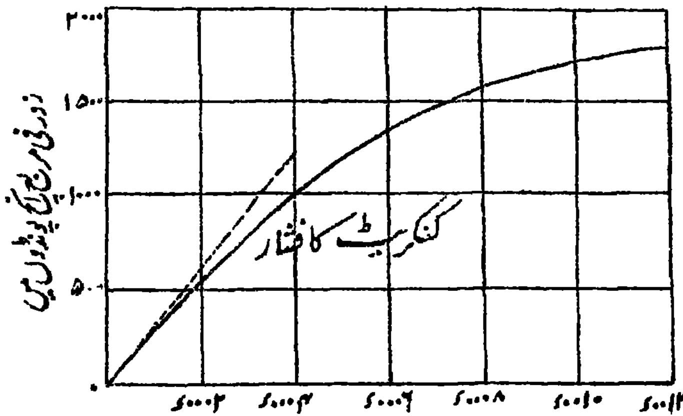
---

[1] مزید معلومات کے لیے قارئین مصنف کی کتاب "مضبوطی اشیا" دیکھ سکتے ہیں۔

ہو جاتا ہے۔ ڈھلے لوہے میں زور اور فساد کے تمناسب نہ ہونے کی وجہ ہی ہے کہ ڈھلے لوہے کے شہتیروں کی حقیقی اور محسوبہ مضبوطیوں میں اتنا بڑا اختلاف ہوتا ہے۔

دیگر اشیا۔ چوبینہ۔ چوبینے کی صحیح آزمائش میں بہت سی دقتیں ہیں جن کی وجہ رطوبت اور مادے کا متجانس بن ہے۔ اتنا کہا جا سکتا ہے کہ زور اور فساد کا نقشہ ایک حصے تک تقریباً مستقیم رہتا ہے لیکن پھر اس طرح منحنی ہو جاتا ہے جس طرح ڈھلے لوہے کا فشاری منحنی ہوتا ہے۔

سیمنٹ اور کنکریٹ۔ سیمنٹ اور کنکریٹ کے فشار کے زور اور فساد کے نقشے کا کوئی حصہ ٹھیک ٹھیک مستقیم نہیں ہوتا۔ اس طرح اس کی کوئی لچک کی حد نہیں۔ اور نقشے کا منحنی ترکیب پر اور جمنے کے بعد کی مدت پر منحصر ہوتا ہے۔



شکل ۳۔ کنکریٹ کے فشار کے زور اور فساد کے نقشے

شکل ۳ میں جو منحنی دکھایا گیا ہے وہ تقریباً بالکل ایک مکافی ہے۔ یہ منحنی ایک ۱ : ۲ : ۴ کنکریٹ کا ہے جو ۹۰ دن کا تھا جس کا امتحان مسٹر اسلوکم (الی نو آئے یونیورسٹی) نے کیا۔ بعض ماہرین فرض کر لیتے ہیں کہ منحنی ایک مکافی ہے لیکن عملاً یہ بہت کم ہوتا ہے کہ منحنی مکافی ہونے کے اتنا قریب ہو۔ البتہ زور اور فساد کا نقشہ تقریباً ہمیشہ ایک مشابہ شکل وصورت کا ہوتا ہے جس میں فساد زور کی بہ نسبت زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ یہ یاد رکھنا بے حد اہم ہے کہ سیمنٹ اور کنکریٹ میں زور اور فساد کا ربط اجزا کے وصف اور تناسب کے بدلنے سے بڑی حد تک بدل جاتا ہے اور اس کو تقریباً مستقل نہیں سمجھا جا سکتا جس طرح کہ فولاد کی صورت میں سمجھا جاتا ہے۔ تناؤ میں اس سے کسی قدر مشابہ منحنی حاصل ہوتا ہے لیکن چونکہ سیمنٹ اور کنکریٹ تناؤ میں تقریباً کبھی استعمال نہیں ہوتے اس لیے اس کی تنشی مضبوطی کی کچھ زیادہ تحقیق نہیں کی گئی۔ نیز یہ بہت متغیر بھی ہے۔

اینٹ۔ پتھر۔ وغیرہ — اینٹ اور پتھر کے زور اور فساد کے نقشے منحنی ہوتے ہیں لیکن اتنے نہیں جتنے کنکریٹ کے۔ ان میں کوئی معین لچک کی حد نہیں اور منحنی بڑی حد تک اس پر منحصر ہے کہ آیا یہ اشیا گچ میں بٹھائی گئی ہیں کیونکہ اس صورت میں منحنی گچ کے خواص سے متاثر ہوگا۔ اس مضمون پر مزید معلومات کے لیے قارئین جانسن کی "اشیائے تعمیر" اور پاپل ویل و کیرنگٹن کی "انجینیری اشیا کے خواص" کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔

لچک کے مستقل یا مقیاس۔ اگر کوئی شئے فی الحقیقت لچکدار ہو یعنی اگر فساد زور کے متناسب ہو تو یہ لازم آتا ہے کہ زور

۱ Mr. R. H. Slocum ۲ Illinois ۳ Popplewell ۴ Carrington

اکائی کے فساد کا ہمیشہ ایک خاص ضعف ہو یعنی نسبت $\frac{\text{زور کی حدت}}{\text{اکائی کا فساد}}$ مستقل ہو۔ اس زور اور فساد کی نسبت کو مقیاس کہا جاتا ہے۔ تناؤ اور فشار کے مقیاس کو عام طور پر ینگ کا مقیاس کہا جاتا ہے۔ اور اس کے لیے حرف ے اختیار کیا جاتا ہے۔ جز کے مقیاس کو جزی مقیاس یا استواری کا مقیاس (س) کہا جاتا ہے۔ ایک اور مقیاس جحمی مقیاس (ح) ہے جو دباؤ یا تناؤ کی حدت کی اور اس اکائی کی تبدیلی کی نسبت کو تعبیر کرتا ہے جو زیر بحث شے کے ایک ایسے مکعب کے حجم میں پیدا ہو جس کے تمام چہروں پر دباؤ یا تناؤ کی یہ حدت عمل کرے۔

تعمیروں کی تجویز میں ہم کو سب میں زیادہ ینگ کے مقیاس سے سابقہ رہیگا۔ فرض کرو کہ ایک تنشی رکن (جس کو بندھن کہا جاتا ہے) یا ایک فشاری رکن (یعنی د ا ب س و ک) پر جس کا طول ل اور تراشی رقبہ ب ہے ایک کھینچ یا ڈھکیل د عمل کرتا ہے اور یہ کہ تطول یا تقصر لا ہے (شکل ۲) ۔ تب زور کی حدت $\frac{د}{ب}$ ہوگی اور اکائی کا فساد $\frac{لا}{ل}$ ہوگا۔

$$\therefore \text{ینگ کا مقیاس} = ے = \frac{د}{ب} \div \frac{لا}{ل} = \frac{د\,ل}{ب\,لا}$$

عددی مثال۔ ایک نرم فولاد کی بندھن سلاخ پر جس کا طول ۱۲ انچ اور قطر $1\frac{1}{2}$ انچ ہے ۱۸ ٹن کی ایک کھینچ عمل کرتی ہے۔ اگر تطول ۰٫۰۹۴ انچ ہو تو ینگ کا مقیاس معلوم کرو۔

$1\frac{1}{2}$ انچ قطر کی تراشش کا رقبہ = ۱٫۷۶۷ مربع انچ

$\therefore$ زور فی مربع انچ = $\frac{۱۸}{۱٫۷۶۷}$ = ۱۰٫۱۹ ٹن فی مربع انچ

اکائی کا فساد = $\frac{۰٫۰۹۴}{۱۲}$ = ۰٫۰۰۷۸۳

∴ ینگ کا مقیاس = $\frac{۱۰٫۱۹}{۰٫۰۰۰۸۳}$ = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ

ینگ کے مقیاس کی قیمت زور اور فساد کے نقشے سے معلوم ہو سکتی ہے۔ مثلاً نرم فولاد کے نقشے (شکل ۲) سے

ے = $\frac{ز}{لا}$

ربط ہے = $\frac{زور}{فساد}$ میں اگر فساد = ۱ یعنی اگر سلاخ کو اصلی طول کے دو گنے تک کھینچا جائے تو ے = زور اور اسی بنا پر بعض مصنفین نے ینگ کے مقیاس کی یہ تعریف کی ہے کہ ینگ کا مقیاس وہ زور ہے جو کسی سلاخ کے طول کو دگنا کر دینے کے لیے درکار ہو۔ بعض طلبہ اس تعریف کو پہلے کی تعریف سے زیادہ واضح پاتے ہیں لیکن یہ یاد رہے کہ اشیائے تعمیر میں سے کوئی شے ٹوٹے بغیر دگنے طول تک نہیں کھینچی جا سکتی۔

کنکریٹ اور مماثل اشیاء کے لیے ینگ کا مقیاس۔

اگر ینگ کا مقیاس ایک مستقل مقدار ہو تو اس کو صرف لچک کی حد کے اندر تک معلوم کر سکتے ہیں اور صحیح دیکھا جائے تو کنکریٹ جیسی اشیاء کے لیے کوئی مقیاس ہی نہیں کیونکہ ان میں فساد، زور کے متناسب نہیں۔ ہم آگے چل کر باب ۱۵ میں دیکھینگے کہ ینگ کے مقیاس کی قیمت محکم کنکریٹ کی تجویز میں ایک بہت اہم مقدار ہے۔ شکل ۳ سے ظاہر ہے کہ چونکہ کنکریٹ میں فساد، زور کی بہ نسبت زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے اس لیے $\frac{زور}{فساد}$ کی قیمت پست زور پر بڑے زور کے مقابلے میں زیادہ ہوگی اس لیے قبل اس کے کہ اس کی قیمت ہمارے کچھ کام آسکے وہ زور معلوم ہونا چاہیے جس پر اس کو محسوب کیا گیا ہے۔ ان اصولوں پر جن پر نظریۂ تعمیر کی بنیاد ہے جتنا زور دیا جائے کم ہے اور کنکریٹ میں فشاری مضبوطی اور ینگ کے مقیاس کے اعداد بے کار ہیں جب تک کنکریٹ کی ترکیب نہ معلوم ہو اور وہ زور نہ معلوم ہو جس پر مقیاس محسوب کیا گیا ہے۔

لچک کے مستقلوں کے درمیان ربط ــــ لچکدار اشیا میں

لچک کے مستقلوں سے ' س ' ح اور پوائسن (Poisson) کی نسبت عا میں چند خاص ربط ہونگے ۔ اِن کو اس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے :۔

پہلے سے اور ح کے درمیان ربط معلوم کرنے کے لیے ایک مکعب پر غور کرو جس کا ہر ضلع اکائی ہے اور جس پر ایک کھینچ ز عمل کرتی ہے شکل ۱۲ (ا)۔ فرض کرو کہ محور کی سمت میں تطول و ہے اور عرضی تقصر ب ہے ۔

تب

مکعب کا ابتدائی حجم = ۱

فساد کے بعد حجم = (۱ + و) (۱ - ب)^2

= ۱ - ۲ب + ب^2 + و - ۲ و ب + و ب^2

= ۱ + و - ۲ ب (تقریباً)

کیونکہ فسادوں کے بہت چھوٹے ہونے کی وجہ سے اُن کے حاصلِ ضرب نظر انداز کیے جا سکتے ہیں ۔

∴ حجم کا اضافہ = (۱ + و - ۲ب) - ۱

= و - ۲ ب

اب مکعب کے ہر پہلو پر زور لگاؤ تو تین زور ہونگے جن میں سے ہر ایک سے حجم کا اضافہ (و - ۲ ب) عمل میں آئیگا ۔

∴ حجم کا مجموعی اضافہ تقریباً = ۳ (و - ۲ ب)

= ۳ و (۱ - $\frac{۲ ب}{و}$)

لیکن $\frac{ب}{و} = \frac{\text{عرضی فساد}}{\text{طولی فساد}} =$ عا

∴ حجم کا اضافہ = ۳ و (۱ - ۲ عا)

اور چونکہ اصلی حجم = ۱

∴ $\frac{\text{حجم کا اضافہ}}{\text{اصلی حجم}} =$ حجمی اکائی کا فساد = ۳ و (۱ - ۲ عا)

لیکن ح = کھینچ کی حدّت / اکائی کا فساد = ز / ۳ ل (۱ - ۲ عا)

اور تنشی زور کی حدت / اکائی کا تنشی فساد = ز / ل = ینگ کا مقیاس = ے

∴ ح = ے / ۳ (۱ - ۲ عا) ..... (۱)

ے اور س کا ربط اِس طرح معلوم کیا جائیگا۔

فرض کرو کہ حدت ز کی دو جزی قوتیں ایک اکائی مکعب ا ب ج د کے چہروں پر عمل کرتی ہیں، شکل ۲ (ب)۔ اب حصہ ا د ج شکل ۲ (ج) کے تعادل پر غور کرو۔ قوتوں ز کے توازن کے لیے وتر ا ج پر ایک کھینچنے والی قوت زِ ہونی چاہیے اور زِ کی قیمت √۲ ز ہونی چاہیے لیکن جس رقبے پر یہ عمل کرتی ہے وہ √۲ ہے کیونکہ مکعب کا ضلع اکائی ہے۔ اِس طرح تنشی زور √۲ ز / √۲ = ز ہوگا۔ اسی طرح حصہ ب ج د شکل ۲ (د) پر غور کرنے سے حاصل ہوگا کہ وتر ب د پر ایک فشاری قوت √۲ ز / √۲ = ز ہونی چاہیے۔ اِس طرح دیکھو دو علی القوائم مستویوں پر عمل کرنے والے جزی زور معادل ہیں ایک تنشی زور اور ایک فشاری زور کے جو ایک دوسرے کے علی القوائم اور جزی زوروں سے ۴۵° پر عمل کریں اور جن کی حدّات جزی زور کی حدّات کے مساوی ہو۔

مکعب کی شکل بگڑ کر ا ب۱ ج۱ د شکل ۲ (ع) ہوجائیگی۔

اکائی کا جزی فساد بگاڑ کے زاویے ۲ فہ سے ناپا جاتا ہے۔ چونکہ فساد بہت چھوٹے ہونگے اِس لیے یہ تقریباً = ۲ ب ب۱ / ½ ب ج = ۲ ب ب۱ / ½

(کیونکہ ب ج = ۱) = ۴ ب ب۱

فرض کرو کہ وتر ب د کے متوازی تناؤ سے اکائی کا فساد = ل۔ تب اس وتر کی سمت میں ا ج کے متوازی فشار کے عرضی فساد کی وجہ سے بھی ایک فساد ہوگا اور یہ عا × ل ہوگا۔ اس لیے وتر کی سمت میں مجموعی اکائی کا فساد = ل (۱ + عا)، لیکن ب ب۱ = وتر کی سمت میں اکائی کا فساد × ½ ب د

کیونکہ ب ب۱ = د د۱

$$\therefore\ \text{ب ب}_{۱} = \text{ل}\,(۱+\text{عا}) \times \tfrac{۱}{۲}\,\text{ب د} = \frac{\text{ا}\sqrt{۲}\ \text{ل}}{۲}\,(۱+\text{عا})$$

چونکہ فساد دراصل بہت چھوٹے ہیں اس لیے ب ب۲ ب۱ بہت تقریباً ایک قائم الزاویہ مثلث ہے۔

$$\therefore\ \text{ب ب}_{۱} = \sqrt{۲}\ \text{ب ب}_{۲}$$

$$\text{یا}\quad \text{ب ب}_{۲} = \frac{\text{ب ب}_{۱}}{\sqrt{۲}} = \frac{\text{ل}\,(۱+\text{عا})}{۲}$$

$$\text{لیکن}\quad \frac{\text{تنشی زور کی حدت}}{\text{تنشی اکائی کا فساد}} = \frac{\text{ز}}{\text{ل}} = \text{ے}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{جزی زور کی حدت}}{\text{اکائی کا جزی فساد}} = \frac{\text{ز}}{۴\ \text{ب ب}_{۲}} = \text{س}$$

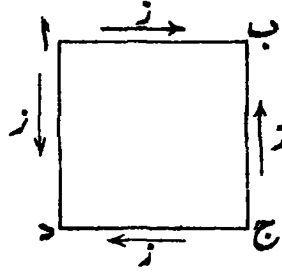
چونکہ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ وتر کی سمت میں تنشی زور کی حدت جزی زور کے مساوی ہے

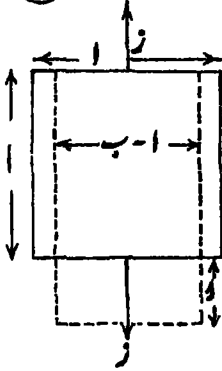
$$\text{اس لیے}\quad \text{ز} = \text{ل ے} = \text{س} \times ۴\ \text{ب ب}_{۲}$$

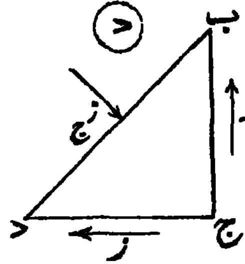
$$\therefore\ \frac{\text{ے}}{\text{س}} = \frac{۴\ \text{ب ب}_{۲}}{\text{ل}} = \frac{۴\ \text{ل}\,(۱+\text{عا})}{۲\ \text{ل}}$$

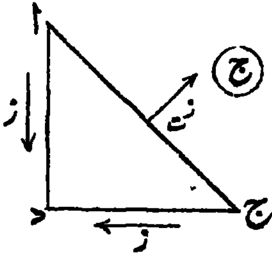
$$\therefore\ \frac{\text{ے}}{\text{س}} = ۲\,(۱+\text{عا}) \quad \cdots\cdots\cdots\ (۲)$$

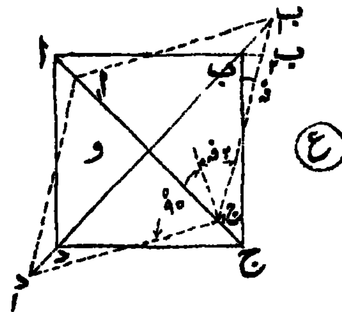
اور (۱) میں دکھایا جا چکا ہے کہ











شکل ۲

$$\frac{\text{ے}}{\text{ح}} = ۳(۱ - ۲\,\text{عا}) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (۳)$$

$\therefore$ (۲) سے $\text{عا} = \frac{\text{ے}}{۲\,\text{س}} - ۱$

اور (۳) سے $\text{عا} = \frac{۱}{۲} - \frac{\text{ے}}{۶\,\text{ح}}$

$$\therefore \quad \frac{\text{ے}}{۲}\left(\frac{۱}{\text{س}} + \frac{۱}{۳\,\text{ح}}\right) = \frac{۳}{۲}$$

$$\therefore \quad \frac{۱}{\text{س}} + \frac{۱}{۳\,\text{ح}} = \frac{۳}{\text{ے}}$$

یا
$$\frac{۹}{\text{ے}} = \frac{۳}{\text{س}} + \frac{۱}{\text{ح}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (۴)$$

یہ مستقلوں کے باہمی ربط کی سادہ ترین شکل ہے۔
اگر $\text{عا} = \frac{۱}{۴}$ جیسا کہ بعض ماہرین کا بیان ہے تو $\frac{\text{ے}}{\text{س}} = ۲٫۵$ اور اسی کو صحیح مانا جائے اگر کسی شے کے لیے س کی قیمت معلوم نہیں۔

مخلوط زور ——— صل زور — یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ جب کوئی جسم زور کے کسی پیچیدہ نظام کے تحت ہو تو یہ زور ان زوروں کے مساوی ہونگے جو تین باہم علی القوائم مستویوں پر عمل کرنے والے سادہ تنشی یا فشاری زوروں سے پیدا ہوں۔ یہ سادہ زور صل زور کہلاتے ہیں۔

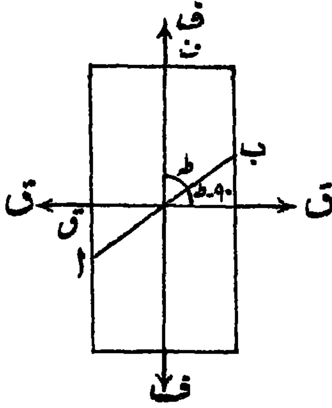
مثلاً ایک کندے پر غور کرو جس پر دو علی القوائم سمتوں میں دو کھنچیں ف اور ق عمل کرتی ہیں (شکل ۵) اور فرض کرو کہ ان سمتوں میں کھنچ تراشی رقبہ کے فی مربع انچ علی الترتیب ف اور ق ہے۔

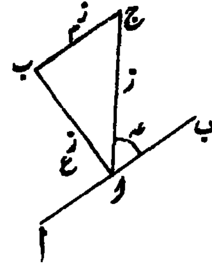
ایک مستوی ا ب پر کے زوروں پر غور کرو جو قوت ف کی سمت سے زاویہ طہ بناتی ہے۔

زور ف کو ا ب کے علی القوائم اور اس کی سمت میں یعنی ا ب کی عمادی اور مماسی سمتوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

اب ف کے علی القوائم ا مربع انچ رقبے پر غور کرو۔ اس کے تمناظر

اب پر رقبہ $\frac{1}{\text{جب طہ}}$ ہوگا۔





شکل ۵ ۔ صدر زور

ف کا جزوِ تحلیلی اب کے علی القوائم ف جب طہ اور اب کی سمت میں ف جم طہ ہوگا ۔ لیکن زور = قوت کا جزوِ تحلیلی ÷ رقبہ

∴ زور ف کا جزوِ تحلیلی اب پر عمادی سمت میں

$$= \text{ف جب طہ} \div \frac{1}{\text{جب طہ}}$$

$$= \text{ف جب}^{2}\ \text{طہ}$$

اور زور ف کا جزوِ تحلیلی اب پر مماسی سمت میں

$$= \text{ف جم طہ} \div \frac{1}{\text{جب طہ}}$$

$$= \text{ف جب طہ جم طہ}$$

اب زور ق پر غور کرو ۔ اب پر اس کا مماسی جزوِ تحلیلی ف کے جزوِ تحلیلی کی مخالف سمت میں ہوگا اور چونکہ اس صورت میں رقبہ $\frac{1}{\text{جب (۹۰-طہ)}} = \frac{1}{\text{جم طہ}}$ اور ق کے

عمادی اور مماسی اجزائے تحلیلی علی الترتیب ق جم طہ اور ق جب طہ ہونگے اس لیے زور کا عمادی جزوِ تحلیلی ق جم۲ طہ اور مماسی جزوِ تحلیلی - ق جب طہ جم طہ ہوگا کیونکہ یہ مماسی جزوِ تحلیلی ف کے مماسی جزوِ تحلیلی کی مخالف سمت میں ہے۔

∴ مجموعی عمادی جزوِ تحلیلی = زع = ف جب۲ طہ + ق جم۲ طہ ...... (۱)

اور 〃 مماسی 〃 = زم = (ف - ق) جب طہ جم طہ ..... (۲)

ان زوروں زع اور زم کا حاصل ز خط ا ج سے بتعبیر ہوگا۔

اور ز = $\sqrt{}$ زع۲ + زم۲

= $\sqrt{}$ (ف جب۲ طہ + ق جم۲ طہ)۲ + (ف - ق)۲ جب۲ طہ جم۲ طہ

= $\sqrt{}$ { ف۲ (جب۴ طہ + جب۲ طہ جم۲ طہ) + ق۲ (جم۲ طہ جب۲ طہ + جم۴ طہ) + ۲ف ق (جم۲ طہ جب۲ طہ - جم۲ طہ جب۲ طہ) }

= $\sqrt{}$ { ف۲ جب۲ طہ (جم۲ طہ + جب۲ طہ) + ق۲ جم۲ طہ (جب۲ طہ + جم۲ طہ) + ۰ }

= $\sqrt{}$ ف۲ جب۲ طہ + ق۲ جم۲ طہ .... (۳)

کیونکہ جم۲ طہ + جب۲ طہ = ۱

اس زور کا میلان ا ب سے ع ہو تو

مس ع = زع / زم = (ف جب۲ طہ + ق جم۲ طہ) / ((ف - ق) جب طہ جم طہ)

= (ف مس۲ طہ + ق) / ((ف - ق) مس طہ) .... (۴)

اگر ل ج اور ف کی سمت کے درمیان زاویہ فہ ہو

تو $\text{فہ} = (\text{عہ} - \text{طہ})$

اور $\text{مس فہ} = \text{مس}(\text{عہ} - \text{طہ}) = \dfrac{\text{مس عہ} - \text{مس طہ}}{۱ + \text{مس عہ} \times \text{مس طہ}}$

$$= \dfrac{\dfrac{\text{ف مس}^2\,\text{طہ} + \text{ق}}{(\text{ف} - \text{ق})\,\text{مس طہ}} - \text{مس طہ}}{۱ + \dfrac{\text{ف مس}^2\,\text{طہ} + \text{ق}}{(\text{ف} - \text{ق})\,\text{مس طہ}} \times \text{مس طہ}}$$

$$= \dfrac{\text{ف مس}^2\,\text{طہ} + \text{ق} - (\text{ف} - \text{ق})\,\text{مس}^2\,\text{طہ}}{(\text{ف} - \text{ق})\,\text{مس طہ} + \text{مس طہ}\,(\text{ف مس}^2\,\text{طہ} + \text{ق})}$$

$$= \dfrac{\text{ق}\,(۱ + \text{مس}^2\,\text{طہ})}{\text{ف مس طہ}\,(۱ + \text{مس}^2\,\text{طہ})} = \dfrac{\text{ق}}{\text{ف مس طہ}}$$

یعنی $\text{مس فہ} = \dfrac{\text{ق}}{\text{ف}}\,\text{جم طہ}$ .... (۵)

زور کا ناقص (Ellipse)

——— علی الترتیب ف اور ق کے مساوی نصف قطروں و لا اور و ما کے دائرے کھینچو (شکل ۶ع) اور و ما سے زاویہ طہ پر و س کھینچو۔

و س کے علی القوائم بڑے دائرے کا نصف قطر و ق کھینچو جو چھوٹے دائرے کو ع پر قطع کرے۔

و ما کے علی القوائم ف لا اور ف لا کے علی القوائم ع گ کھینچو اور و گ کو ملاؤ۔

اب $\text{و لا} = \text{و ف جم}(۹۰^\circ - \text{طہ}) = \text{ف جب طہ}$

اور $\text{گ لا} = \text{ع ک} = \text{و ع جب}(۹۰^\circ - \text{طہ}) = \text{ق جم طہ}$

$\therefore$ و گ = $\sqrt{\text{و ہ}^2 + \text{ہ گ}^2} = \sqrt{\text{ف}^2 \text{ جب}^2 \text{ ط} + \text{ق}^2 \text{ جم}^2 \text{ ط}}$

$\therefore$ مساوات (۳) سے و گ = ز

اب مس ہ و گ = $\frac{\text{ہ گ}}{\text{و ہ}} = \frac{\text{ق جم ط}}{\text{ف جب ط}} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}}$ مم ط = مس فہ

$\therefore$ ∠ ہ و گ = فہ

اور چونکہ عہ = ط + فہ

$\therefore$ ∠ گ و س = عہ

نقطہ گ کا طریق ایک ناقص ہوگا جس کا بڑا محور ۲ ف اور چھوٹا محور ۲ ق ہوگا اور یہ ناقص "زور کا ناقص" کہلاتا ہے۔

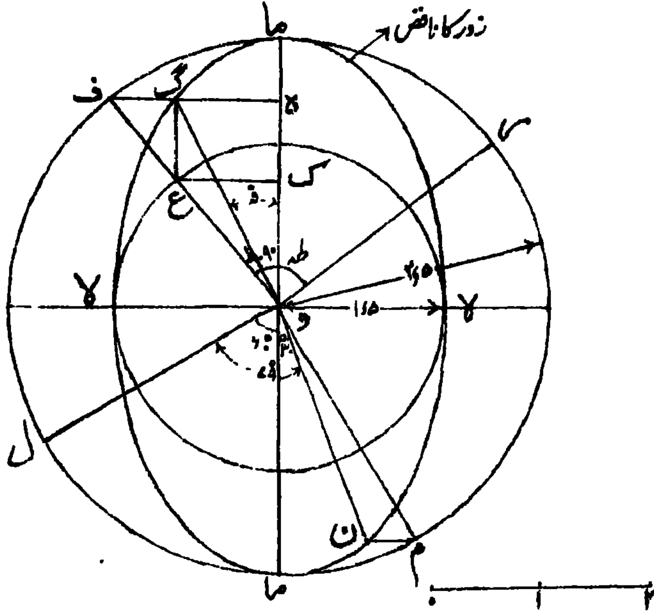
اس طرح دیکھو مرکز و سے ایک دی ہوئی سمت کے علی القوائم بڑے دائرے تک و ف کھینچ کر ف ہ افقاً کھینچیں جو زور کے ناقص کو گ پر ملے تو و گ اُس حاصل زور کو تعبیر کرتا ہے جو دی ہوئی سمت کے مستوی پر عمل کرتا ہے اور زاویہ گ و س = عہ سے اِس حاصل زور اور مستوی کا زاویہ تعبیر ہوتا ہے۔

عددی مثال —— فرض کرو کہ ایک مربع سلاخ پر جس کا ضلع ۲ انچ ہے اور جو ۴ انچ لمبی ہے محوری اور عرضی سمتوں میں علی الترتیب ۱۰ اور ۱۲ ٹن کی کھینچایں عمل کرتی ہیں۔ اس مستوی پر حاصل زور معلوم کرو جو محور سے ۶۰° بناے اور اس زور کا اُس مُستوی سے میلان معلوم کرو۔

اِس صورت میں ف = $\frac{۱۰}{۴}$ = ۲٫۵ ٹن فی مربع انچ

اور ق = $\frac{۱۲}{۸}$ = ۱٫۵ ″ ″ ″ ″

شکل ۶ میں زور کا ناقص پیمانے کے ساتھ کھینچا گیا ہے۔



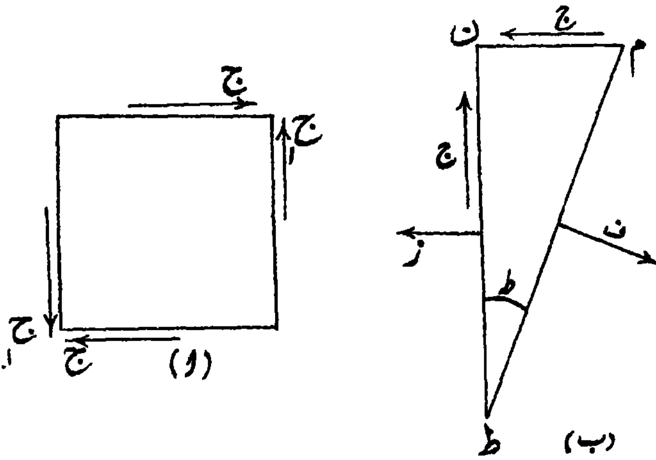
شکل ۶ ۔ زور کا ناقص

و ما سے ۹۰° پر د ل کھینچو اور د ل کے علی القوائم و م کھینچو جو بیرونی دائرے کو م پر قطع کرے۔ م ن افقاً کھینچو جو زور کے ناقص کو ن پر ملے۔ تب و ن حاصل زور کو تعبیر کریگا اور ل د ن اس کے اس مستوی سے میلان کو تعبیر کریگا۔ و ن = ۲،۲۹ ٹن فی مربع انچ اور ل د ن = ۹ ۲° پائے جائینگے۔

اب پھر زوروں ف اور ق اور عمادی اور مماسی زوروں ن ع اور ن م پر غور کرو تو معلوم ہوگا کہ ف اور ق زوروں ن ع اور ن م کے متناظر صدر زور ہیں۔ عملاً اکثریہ ہوگا کہ صدر زوروں کی مقدار اور میلان مطلوب ہونگے کیونکہ ایک صدر زور کی حدت اعظم حدت ہوگی۔ یہ زور کے ناقص کی شکل سے ظاہر ہے کیونکہ صریحاً و ما ناقص کا اعظم سمتی نیم قطر ہے۔ اس لیے اب ہم اس کا معکوس

عمل کرینگے یعنی ایک عمادی زور ز اور اسکے علی القوائم ایک جزی یا مماسی زور ج کی وجہ سے پیدا ہونے والے صدر زور معلوم کرینگے۔

متحدہ عمادی اور جزی زور ———— اس مسئلہ سے بحث کرنے سے پہلے یہ ثابت کرنا ضروری ہے کہ کسی جزی زور کے ساتھ ایک مساوی جزی زور



شکل ۷۔ متحدہ عمادی اور جزی زور

اس کے علی القوائم موجود ہونا ضروری ہے۔ مثلاً ایک اکائی مکعب لو، شکل ۷ (ا) جس کے مقابل پہلوؤں پر جزی قوتیں ج عمل کرتی ہیں۔ یہ قوتیں ج مل کر ایک جفت ہونگی، اور مکعب کے تعادل کے لیے ضروری ہے کہ ایک اور جفت مساوی معیار اور مخالف جہت کا عمل کرے۔ یہ جفت جزی قوتوں ج سے حاصل ہوگا جو ج کے علی القوائم عمل کریں۔

اب زور کے ایک مخلوط نظام پر غور کرو جو ایک عمادی زور ز اور ایک جزی یا مماسی زور ج پر مشتمل ہے۔

فرض کرو کہ ط ن، شکل ۷ (ب)، اس مستوی کے ایک حصّے کو تعبیر

کرتا ہے جس پر زور ز اور ج عمل کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک صدر زور کا مستوی ط م ہے اور یہ صدر زور ف ہے۔ تب م ن پر بھی ایک جزی زور حدت ج کا ہوگا۔

تب زور ف اور زوروں ز اور ج سے پیدا ہونے والی قوتوں کے تحلیلی اجزائے سمتوں ط ن اور م ن میں مساوی ہونے چاہییں۔ اس طرح

$$\text{ز} \times \text{ط ن} + \text{ج} \times \text{م ن} = \text{ف} \times \text{ط م جم ط} \quad \ldots\ldots(۱)$$

$$\text{اور} \quad \text{ج} \times \text{ط ن} = \text{ف} \times \text{ط م جب ط} \quad \ldots\ldots(۲)$$

$$\therefore \; (۱)\text{ سے} \quad \text{ز}\,\frac{\text{ط ن}}{\text{ط م}} + \text{ج}\,\frac{\text{م ن}}{\text{ط م}} = \text{ف جم ط}$$

$$\text{یا} \quad \text{ز جم ط} + \text{ج جب ط} = \text{ف جم ط}$$

$$\therefore \quad (\text{ف} - \text{ز})\,\text{جم ط} = \text{ج جب ط} \quad \ldots\ldots(۳)$$

$$(۲)\text{ سے} \quad \text{ج}\,\frac{\text{ط ن}}{\text{ط م}} = \text{ف جب ط}$$

$$\therefore \quad \text{ج جم ط} = \text{ف جب ط} \quad \ldots\ldots(۴)$$

(۳) کو (۴) سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{ف} - \text{ز}}{\text{ج}} = \frac{\text{ج}}{\text{ف}}$$

$$\text{یا} \quad \text{ف}\,(\text{ف} - \text{ز}) = \text{ج}^{۲}$$

$$\text{یا} \quad \text{ف}^{۲} - \text{ز ف} - \text{ج}^{۲} = ۰$$

$$\text{یا} \quad \text{ف} = \frac{\text{ز}}{۲} \pm \frac{۱}{۲}\sqrt{\text{ز}^{۲} + ۴\,\text{ج}^{۲}}$$

$$\text{یا} \quad \text{ف} = \frac{\text{ز}}{۲}\left(۱ \pm \sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{ج}^{۲}}{\text{ز}^{۲}}}\right) \quad \ldots\ldots(۵)$$

± میں سے منفی علامت دوسرے صدر زور کے لیے ہے جو منفی یعنی فشاری ہوگا۔ ہم کو چونکہ صرف اعظم زور مطلوب ہے اس لیے مثبت علامت لینے سے

$$\text{ف} = \frac{\text{ز}}{۲}\left(۱ + \sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{ج}^{۲}}{\text{ز}^{۲}}}\right) \ldots\ldots (۶)$$

یہ زور جس مستوی پر عمل کرتا ہے اس کی سمت طہ ہوگی جو اِس طرح حاصل ہوگی :-

(۳) سے $\text{ف جم طہ} - \text{ز جم طہ} = \text{ج جب طہ}$

(۴) سے $\text{ف جب طہ} = \text{ج جم طہ}$

$$\therefore \quad \text{ف} = \frac{\text{ج جم طہ}}{\text{جب طہ}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ج جم}^{۲}\text{ طہ}}{\text{جب طہ}} - \text{ز جم طہ} = \text{ج جب طہ} \ldots\ldots (۷)$$

یا $\text{ج}\left(\text{جم}^{۲}\text{ طہ} - \text{جب}^{۲}\text{ طہ}\right) = \text{ز جب طہ جم طہ}$

$$\therefore \quad \text{ج جم ۲ طہ} = \text{ز}\,\frac{\text{جب ۲ طہ}}{۲}$$

یا $\text{مس ۲ طہ} = \frac{۲\,\text{ج}}{\text{ز}} \ldots\ldots (۸)$

اس سے طہ کی دو قیمتیں حاصل ہونگی جن میں ۹۰° کا فرق ہوگا۔ اِس طرح اِس سے صدر زور کے دونوں مستویوں کے میلان حاصل ہونگے۔

اعظم جزی زور —— صدر زوروں ف اور ق کی بحث میں دکھایا گیا تھا کہ ف سے طہ بنانے والے مستوی پر مماسی زور (ف-ق) جب طہ جم طہ ہوتا ہے۔ (دیکھو صفحہ ۲۰ مساوات (۲))۔ اب یہ اُس وقت اعظم ہوگا جب کہ جب طہ جم طہ اعظم ہو یعنی چونکہ $\frac{\text{جب ۲ طہ}}{۲}$ اعظم ہو یعنی جب کہ طہ = ۴۵° ۔ اس سے معلوم ہوا کہ اعظم جزی زور صدر زوروں سے ۴۵° پر واقع ہوتا ہے اور $\frac{\text{ف} - \text{ق}}{۲}$ کے مساوی ہوتا ہے۔

اس وقت جو مسئلہ زیر بحث ہے اس میں ثابت کیا گیا ہے کہ

$$\text{ف} = \frac{\text{ز}}{۲}\left(۱ + \sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{ج}^۲}{\text{ز}^۲}}\right)$$

اور

$$\text{ق} = \frac{\text{ز}}{۲}\left(۱ - \sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{ج}^۲}{\text{ز}^۲}}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ف} - \text{ق}}{۲} = \frac{\text{ز}}{۲}\sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{ج}^۲}{\text{ز}^۲}}$$

$$\therefore \quad \text{اعظم جزی زور} = \frac{\text{ز}}{۲}\sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{ج}^۲}{\text{ز}^۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$$

$$\text{یا} \quad = \sqrt{\frac{\text{ز}^۲}{۴} + \text{ج}^۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

(۹) اور (۱۰) میں (۱۰) زیادہ کارآمد ہے کیونکہ ز = ۰ کی صورت میں (۹) سے غیر معین نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

عددی مثال —— ۱ انچ قطر کے ایک فولادی بولٹ پر ۳۰۰۰ پونڈ کی ایک راست کھینچ اور ۱ ٹن کی ایک جزی قوت عمل کرتی ہے۔ اعظم تنشی اور جزی زور پونڈ فی مربع انچ میں اور ان زوروں کی سمت کا میلان بولٹ کے طولی محور سے معلوم کرو۔ (بی۔ ایس سی لندن ۱۹۰۷ء)۔

$$\text{موجودہ صورت میں ز} = \frac{۳۰۰۰}{\text{۱ انچ بولٹ کا رقبہ}} = \frac{۳۰۰۰}{.۷۸۵۴}$$

$$= ۳۸۱۹ \quad \text{پونڈ فی مربع انچ}$$

$$\text{اور} \quad \text{ج} = \frac{۲۲۴۰}{.۷۸۵۴} = ۲۸۵۲ \quad \text{پونڈ فی مربع انچ}$$

$$\therefore \quad \text{اعظم تنشی زور} = \text{ف} = \frac{\text{ز}}{۲}\left(۱ + \sqrt{۱ + \frac{۴\,\text{ج}^۲}{\text{ز}^۲}}\right)$$

$$= \frac{۳۸۱۹}{۲}\left(\sqrt{\frac{(۲۸۵۲)^{۲}\times ۴}{(۳۸۱۹)^{۲}}+۱}+۱\right)$$

$$= \frac{۳۸۱۹}{۲}\left(\sqrt{۲٫۲۳۰+۱}+۱\right)$$

$$= \frac{۳۸۱۹}{۲}\left(۱٫۷۹۷+۱\right)$$

= ۵۳۴۲ پونڈ فی مربع انچ

صدر مستوی کا میلان محور کے علی القوائم مستوی سے ط ہو تو

$$\text{مس ۲ ط} = \frac{۲ج}{ز} = \frac{۲۸۵۲\times ۲}{۳۸۱۹}$$

$$= ۱٫۴۹۴$$

∴ ۲ ط = ۵۶° ۱۲′ تقریباً

ط = ۲۸° ۶′

∴ طولی محور سے میلان = ۹۰° − ۲۸° ۶′

= ۶۱° ۵۴′

$$\text{اعظم جزی زور} = \sqrt{\frac{ز^{۲}}{۴}+ج^{۲}}$$

$$= \sqrt{\frac{(۳۸۱۹)^{۲}}{۴}+(۲۸۵۲)^{۲}}$$

$$= ۲۸۵۲\sqrt{\frac{(۳۸۱۹)^{۲}}{(۲۸۵۲)^{۲}\times ۴}+۱}$$

$$= ۲۸۵۲\sqrt{٫۴۴۸+۱}$$

$$= ۱٫۲۰۱\times ۲۸۵۲$$

= ۳۴۲۸ پونڈ فی مربع انچ

یہ زور صدر زور کی سمت سے ۴۵° پر یعنی

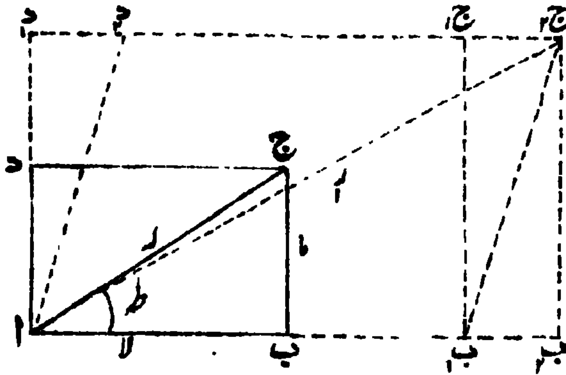
۹۱° ۴۴' − ۴۵° = ۱۶° ۴۴' پر طولی محور سے ہوگا۔

اور یا اس سے ۹۰° پر یعنی طولی محور سے ۳۶° ۴' پر ہوگا۔

*** اعظم فساد کا مقابلہ اعظم زور کے ساتھ** ——— مخلوط زوروں کے مسائل میں یہ خیال رہے کہ اعظم فساد کے لحاظات اعظم زور سے مختلف ہوتے ہیں۔ لچک کے ماہرین کے درمیان اس امر میں خاصا اختلاف ہے کہ کسی تعمیر کی سلامتی آیا تنشی یا فشاری زور کے ایک خاص حد کے اندر رہنے پر یا جزی زور کے ایک خاص حد کے اندر رہنے پر یا فساد کے ایک خاص حد کے اندر رہنے پر موقوف ہے۔

اعظم تنشی یا فشاری اور جزی زور پر غور کیا جا چکا ہے۔ اب ہم اعظم فساد کے سوال پر غور کرینگے۔

فرض کرو کہ ایک مستطیلی کندے ا ب ج د کو دو علی القوائم تنشی فساد اور ایک جھپل فساد اُسی مستوی میں پہنچائے جاتے ہیں۔



شکل ۱۰ش ۔ متعدد فساد

اس مخلوط فساد کے تحت کُندا وضع $\text{اب}_1\text{ج}_1\text{د}_1$ اختیار کریگا۔ تب اگر $\text{اب} = \text{لا}$، $\text{ب ج} = \text{ما}$ اور $\text{اج} = \text{ر}$، اور فساد کے بعد یہ طول لا_1، ما_1، ر_1 ہوجائیں اور $\angle\, \text{د}_1\text{ا}\text{د}_2 = \text{بہ}$ تو

$$\text{سمت لا میں اکائی کا فساد} = \text{س}_{\text{لا}} = \frac{\text{لا}_1 - \text{لا}}{\text{لا}}$$

$$\text{〃 ما 〃 〃 〃} = \text{س}_{\text{ما}} = \frac{\text{ما}_1 - \text{ما}}{\text{ما}}$$

$$\text{〃 ر 〃 〃 〃} = \text{س}_{\text{ر}} = \frac{\text{ر}_1 - \text{ر}}{\text{ر}}$$

یا $\text{لا}_1 = \text{لا}(۱ + \text{س}_{\text{لا}})$ .... (۱)

$\text{ما}_1 = \text{ما}(۱ + \text{س}_{\text{ما}})$ .... (۲)

$\text{ر}_1 = \text{ر}(۱ + \text{س}_{\text{ر}})$ .... (۳)

$\therefore\ \text{ر}_1^2 = \text{ر}^2(۱ + ۲\text{س}_{\text{ر}} + \text{س}_{\text{ر}}^2)$

$= \text{ر}^2(۱ + ۲\text{س}_{\text{ر}})$ .... (۴)

کیونکہ فسادوں کی دوسری قوت نظر انداز کی جاسکتی ہے۔

اب $\text{ر}_1^2 = \text{اج}_1^2 = \text{اب}_1^2 + \text{ج}_1\text{ب}_1^2$

$= (\text{اب}_1 + \text{ب}_1\text{ب}_2)^2 + \text{اد}_1^2$

$= (\text{اب}_1 + \text{د}_1\text{د}_2)^2 + \text{اد}_1^2$

اس میں $\text{اب}_1 = \text{لا}_1 = \text{لا}(۱ + \text{س}_{\text{لا}})$

$\text{اد}_1 = \text{ما}_1 = \text{ما}(۱ + \text{س}_{\text{ما}})$

$\text{د}_1\text{د}_2 = \text{ما}_1 \times \text{بہ} = \text{بہ ما}(۱ + \text{س}_{\text{ما}}) = \text{بہ ما}$

کیونکہ یہ چھوٹا ہے اور اس طرح بہ × $س_{ما}$ دوسرے رتبے کی چھوٹی مقدار ہوگی جو نظر انداز کی جا سکتی ہے۔

∴ $ر_{۱}^{۲} = \{لا(۱+س_{لا}) + بہ\,ما\}^{۲} + \{ما(۱+س_{ما})\}^{۲}$

$= لا^{۲}(۱+۲س_{لا}) + ۲\,بہ\,لا\,ما + ما^{۲}(۱+۲س_{ما})$ ...... (۵)

جس میں فسادوں کی دوسری قوتوں کو نظر انداز کر دیا گیا ہے،

لیکن $لا^{۲} + ما^{۲} = ر^{۲}$

∴ $ر_{۱}^{۲} = ر^{۲} + ۲\,لا^{۲}\,س_{لا} + ۲\,ما^{۲}\,س_{ما} + ۲\,بہ\,لا\,ما$ .... (۶)

∴ (۴) سے

$ر^{۲}(۱+۲س_{ر}) = ر^{۲} + ۲\,لا^{۲}\,س_{لا} + ۲\,ما^{۲}\,س_{ما} + ۲\,بہ\,لا\,ما$

یا $س_{ر} = \left(\frac{لا}{ر}\right)^{۲} س_{لا} + \left(\frac{ما}{ر}\right)^{۲} س_{ما} + \frac{لا\,ما}{ر^{۲}}\,بہ$ .... (۷)

اس کو زاویہ طہ کی رقوم میں بیان کریں تو یہ حاصل ہوتا ہے:-

$س_{طہ} = س_{لا}\,جم^{۲}\,طہ + س_{ما}\,جب^{۲}\,طہ + بہ\,جب\,طہ\,جم\,طہ$ ...... (۸)

اب ہم کو طہ کی وہ قیمت معلوم کرنا ہے جس کے لیے حاصل اکائی سکا فساد $س_{طہ}$ اعظم ہو۔

یہ اس وقت ہوگا جب کہ $\frac{ف\,س_{طہ}}{ف\,طہ} = ۰$

یعنی جب کہ

$س_{لا} × ۲\,جم\,طہ(-جب\,طہ) + س_{ما} × ۲\,جب\,طہ\,جم\,طہ + بہ\{جم\,طہ\,جم\,طہ + جب\,طہ(-جب\,طہ)\} = ۰$

یعنی جبکہ $-\,س_{لا}\,جب\,۲\,طہ + س_{ما}\,جب\,۲\,طہ + بہ\,جم\,۲\,طہ = ۰$

یعنی $(س_{لا} - س_{ما})\,جب\,۲\,طہ = بہ\,جم\,۲\,طہ$

یا $مس\,۲\,طہ = \frac{بہ}{س_{لا} - س_{ما}}$ .... (۹)

اس سے طہ کی دو قیمتیں علی القوائم حاصل ہوتی ہیں جس سے معلوم ہوتا ہے کہ اعظم فساد کی سمتیں باہم علی القوائم ہیں۔

اب مساوات (۸) پر غور کرو۔ ۱ = جم^۲ طہ + جب^۲ طہ رکھ کر اس کو یوں لکھ سکتے ہیں:-

س_طہ (جم^۲ طہ + جب^۲ طہ) = س_۱ جم^۲ طہ + س_۲ جب^۲ طہ + بہ جب طہ جم طہ

جم^۲ طہ سے تقسیم کرنے سے

س_طہ (۱ + مس^۲ طہ) = س_۱ + س_۲ مس^۲ طہ + بہ مس طہ

یا مس^۲ طہ (س_۲ − س_طہ) + بہ مس طہ + س_۱ − س_طہ = ۰

یا مس طہ = (− بہ ± √[بہ^۲ − ۴ (س_۲ − س_طہ) (س_۱ − س_طہ)]) ÷ ۲ (س_۲ − س_طہ)

اس کے حقیقی ہونے کے لیے ضروری ہے کہ

بہ^۲ چھوٹا نہ ہو ۴ (س_۲ − س_طہ) (س_۱ − س_طہ) سے

اب دیکھو س_طہ کے بڑھنے سے ۴ (س_۲ − س_طہ) (س_۱ − س_طہ) بڑھیگا کیونکہ یہ جملہ = ۴ (س_طہ − س_۲) (س_طہ − س_۱)

∴ س_طہ کی قیمت اس سے زیادہ نہ ہونی چاہیے جس سے بہ^۲ = ۴ (س_۲ − س_طہ) (س_۱ − س_طہ)

یا س_طہ^۲ − س_طہ (س_۱ + س_۲) + س_۱ س_۲ − بہ^۲/۴ = ۰

یا س_طہ = (س_۱ + س_۲ ± √[(س_۱ − س_۲)^۲ + بہ^۲]) ÷ ۲ ……… (۱۰)

اب اس صورت پر غور کرو جس کے لیے ہم صدر زور حاصل کر چکے ہیں یعنی

ایک تنشی یا فشاری زور ز اور ایک جزی زور ج۔ اس صورت میں اگر $س_ل$ = زور ز کی وجہ سے فساد، توسمت ۱ میں فساد صرف $س_ل$ کا عرضی فساد ہوگا یعنی $س_م = -عا \times س_ل$ (منفی اس لیے کہ عرضی فساد فشاری ہوگا)۔
مساوات (۱۰) میں صرف مثبت قیمت لینے سے اس صورت میں

$$س_ط = \frac{س_ل(۱-عا) + \sqrt{س_ل^۲(۱+عا)^۲ + ب^۲}}{۲}$$

اب $س_ل = \frac{ز}{ے}$ اور $ب = \frac{ج}{س}$

نیز $س_ط = \frac{ف_۱}{ے}$، جہاں $ف_۱$ معادل زور ہے جو اعظم فساد کے لحاظ سے ہو۔ ے اور س ینگ کا اور جزی مقیاس ہیں۔

$$\therefore \frac{ف_۱}{ے} = \frac{ز(۱-عا)}{۲ے} + \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{ز^۲}{ے^۲}(۱+عا)^۲ + \frac{ج^۲}{س^۲}}$$

$$= \frac{ز}{۲ے}\left\{(۱-عا) + \sqrt{(۱+عا)^۲ + \frac{ج^۲ ے^۲}{ز^۲ س^۲}}\right\}$$

لیکن $\frac{ے}{س} = ۲(۱+عا)$

$$\therefore ف_۱ = \frac{ز}{۲}\left\{(۱-عا) + (۱+عا)\sqrt{۱ + \frac{۴ج^۲}{ز^۲}}\right\} \quad \text{......(۱۱)}$$

عا کی قیمت فولاد کے لیے تقریباً $\frac{۱}{۴}$ ہے۔ اس لیے اس کو اختیار کرنے سے

$$ف_۱ = \frac{ز}{۲}\left(\frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۴}\sqrt{۱ + \frac{۴ج^۲}{ز^۲}}\right) \quad \text{..........(۱۲)}$$

اس کا مقابلہ مساوات (۶) (صفحہ ۲۶) سے کریں جس میں زور پر غور کیا گیا ہے تو دونوں نقاطِ نظر سے حاصل ہونے والے نتائج کا فرق واضح

ہو جاتا ہے۔

عددی مثال — اُسی سوال پر غور کرو جو صفحہ ۲۷ پر حل کیا گیا ہے۔

اِس صورت میں ز = ۳۸۱۹ پونڈ فی مربع انچ

ج = ۲۸۵۲ " "

$$\therefore \quad ف_ا = \frac{۳۸۱۹}{۲}\left(\frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۴}\sqrt{۱ + \frac{۴ \times (۲۸۵۲)^۲}{(۳۸۱۹)^۲}}\right)$$

$$= \frac{۳۸۱۹}{۲}\left(\frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۴}\sqrt{۳٫۲۳}\right)$$

$$= \frac{۳۸۱۹}{۲}\left(۰٫۷۵ + ۲٫۲۴۶\right)$$

$$= \frac{۳۸۱۹}{۲} \times ۲٫۹۹۶$$

$$= ۵۷۲۲ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

اعظم فساد کی سمت معلوم کرنے کے لیے مساوات (۹) پر واپس آؤ۔ اس سے

$$\text{مس } ۲ط = \frac{ب}{س_ا - س_ا}$$

جو اس صورت میں

$$= \frac{\frac{ج}{س}}{س_ا(۱+عا)} = \frac{\frac{ج}{س}}{\frac{ز(۱+عا)}{ے}}$$

$$= \frac{ج \times ے}{ز(۱+عا) \times س}$$

$$= \frac{ج \times ۲(۱+عا)}{ز(۱+عا)} = \frac{۲ج}{ز}$$

اور یہ وہی صدر زور کی سمت ہے اس لیے ط کی وہی قیمت حاصل ہوگی جو صدر زور کے لیے آچکی ہے۔

مخلوط زوروں کا لحاظ کرنے کے اس طریقے کو مصنف نے اس قدر تفصیل کے ساتھ اس لیے لکھا ہے کہ اکثر درسی کتابوں میں اس کا حوالہ تک نہیں دیا جاتا۔ اس طریقے میں ف وہ سادہ تنشی زور ہے جس سے کسی شے میں وہی فساد پیدا ہوگا جو دیے ہوئے مخلوط زوروں سے پیدا ہونے والا اعظم فساد ہے اور اس طرح اس کو ان مخلوط زوروں کا معادل زور سمجھا جا سکتا ہے۔

یہ اعظم فساد کا طریقہ، جس کو اعظم زور یا رینکن کے طریقے سے تمیز کرنے کے لیے سان وینان[1] کا یا فرانسیسی طریقہ کہ سکتے ہیں، انگلستان میں عام طور پر معلوم نہیں لیکن لچک کے نظریے کے ممتاز ماہر اس کے استعمال کے بہت حامی ہیں۔

حال میں اس مضمون پر ہینکاک[2]، اسکوبل[3]، سمتھ[4]، اور ٹرنر[5] صاحبان نے بہت احتیاط کے ساتھ تجربات کیے ہیں اور ان تجربات کے عام نتائج سے اس کی بڑی تائید ہوتی ہے کہ مخلوط زوروں کے حسابات کے لیے اعظم جزی زور کا یعنی "گسٹ[6] کا نظریہ" اختیار کیا جائے۔ اس نظریے سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خالص جز میں عملی زور خالص تناؤ سے نصف ہونا چاہیے۔ یہ مساوات (۱۰) صفحہ ۲۷ میں ج = ۰ رکھنے سے نظر آجائیگا۔ یہ ایک بہت اہم نکتہ ہے جس کو عملی مجوزوں نے اب تک محسوس نہیں کیا ہے۔ یا تو ہمارے جزی زوروں کو گھٹانا چاہیے یا تنشی زوروں کو بڑھانا چاہیے۔

بازگشتگی —— فساد پیدا کرنے میں کسی شے کے فی اکائی حجم جو کام کیا جائے وہ بازگشتگی کہلاتا ہے۔ ایک جسم پر غور کرو جس پر سادہ تنشی فساد

[1] St. Venant [2] Hancock [3] Scoble
[4] C.A.M. Smith [5] Turner [6] Guest

عمل کرتا ہے۔ نقطہ ا سے بہت قریب کے نقطہ ب تک جانے میں (شکل ۔۹) عمل کرنے والا اوسط زور ز ہے۔ اس لیے اگر ا ب = لا تو قوت ز کا کام شے میں ا سے ب تک فساد پیدا کرنے میں ز × لا ہوگا۔ اب اگر لا اکائی کے فساد کا اضافہ ہو اور ز زور کی حالت ہو تو شے کا حجم جس پر عمل ہوا ہے اکائی ہے۔ اب چونکہ ا ب بہت چھوٹا فرض کیا گیا ہے اس لیے ز × لا زور اور فساد کے منحنی کے سایہ دار حصے کے رقبے کے مساوی ہوگا۔

اس لیے بازگشتگی مساوی ہے زور اور فساد کے منحنی کا رقبہ نقطہ م تک

یعنی بازگشتگی = ∆ طم و کا رقبہ

$= \frac{1}{2}$ ز × لا

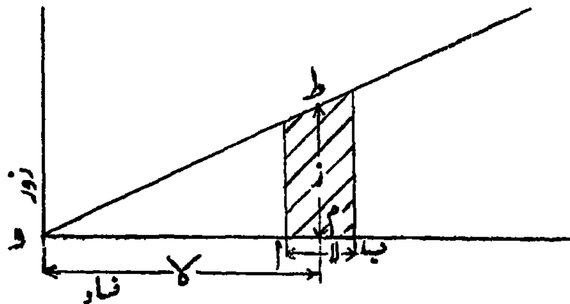
لیکن $\frac{ز}{لا}$ = ینگ کا مقیاس = ے

∴ لا = $\frac{ز}{ے}$

∴ تناؤ میں بازگشتگی = $\frac{ز^2}{2ے}$

اسی طرح جز میں بازگشتگی = $\frac{ج^2}{2س}$

جہاں ج جزی زور ہے۔



شکل ۔۹۔ بازگشتگی

زور کی تکرار یا تغیر ——— تعمیروں کی تجویز میں ایسی صورتوں سے اکثر سابقہ پڑتا ہے جن میں زور کی مقدار وقت کے لحاظ سے بدلتی رہتی ہے۔ یہ صورتیں ایسی تعمیروں میں پیش آتی ہیں جن کو ہوا کا دباؤ یا متحرک بوجھ برداشت کرنا ہوتا ہے۔ حال میں ایسی اشیاء کی مضبوطی پر بہت تحقیقات کی گئی ہے جن پر متبادل زور عمل کرتے ہیں۔ کسی شے کو بتدریج بڑھتے ہوئے زور سے توڑنے میں جو زور درکار ہو وہ "سکونی شکستی زور" کہلاتا ہے اور وہی زور ہے جو معمولی امتحانی مشینوں سے حاصل ہوتا ہے۔

فیربیرن[1] نے پٹواں لوہے کے گرڈروں کی چند آزمایشوں کے سلسلے میں دریافت کیا کہ کسی گرڈر کو ایک بوجھ بار بار لگا کر توڑنے کے لیے سکونی شکستی بوجھ کا تقریباً نصف بوجھ کافی ہے۔

اس مضمون پر پہلی مکمل تحقیق ووہلر[2] نے پرشیا[3] (جرمنی) کی وزارت تجارت کی فرمایش پر کی جو ۱۸۷۰ء میں شایع ہوئی۔ ووہلر بارہ سال تک تجربے کرتا رہا اور اس کے حاصل کردہ نتائج اُس زمانے میں بہت چونکا دینے والے تھے اور ان کی اہمیت انجینیروں نے بہت حال ہی میں محسوس کی ہے۔

ان تجربات سے اور ان کے بعد کے تجربات سے یہ ظاہر ہوا کہ کسی شے کو تکراری زور سے توڑنے کے لیے سکونی زور سے بہت کم زور درکار ہوتا ہے۔

ووہلر کے تجربات میں جو تناؤ، کھاؤ، اور مروڑ میں کیے گئے زور کے بعض تغیر تناؤ یا فشار میں صفر سے ایک اعظم قیمت تک تھے اور بعض میں زور پورا معکوس کیا گیا۔

تجربات کا پورا بیان انون[4] کی "اشیاءے تعمیر کی آزمائش" میں ملیگا۔

---

[1] Fairbairn [2] Wöhler [3] Prussia

[4] Unwin's Testing of The Materials of Construction

ہم اس کے نتائج کی چند مثالیں لینگے:۔

کرُپ[1] کا دُھرا فولاد:۔

سکونی شکستی زور = ۵۲ ٹن فی مربع انچ

شکستی زور صفر سے اعظم تک = ۲۶٫۵ ،، ،،

،، ،، متعاکس زور کے لیے = ۱۴٫۰۵ ،، ،،

پٹواں لوہا:۔

سکونی شکستی زور = ۲۲٫۸ ٹن فی مربع انچ

شکستی زور صفر سے اعظم = ۱۵٫۲۵ ،، ،،

،، ،، متعاکس زور کے لیے = ۸٫۶ ،، ،،

پہلی صورت میں زور کی وسعت ایک صورت میں ۲۶٫۵ اور تعاکس کی صورت میں -۱۴٫۰۵ سے + ۱۴٫۰۵ تک یعنی ۲۸٫۱ ہے۔ دوسری صورت میں وسعتیں ۱۵٫۲۵ اور ۱۷٫۲ ہیں۔

سر بنجمن بیکر[2] نے اسی طرح کے تجربات انگلستان میں کیے اور اسی طرح کے نتائج حاصل ہوئے۔

۲۶٫۲ تا ۲۸٫۶ ٹن فی مربع انچ کی سکونی مضبوطی کے نرم فولاد کے لیے اُن کو زور کے تعاکس کی صورت میں شکستی زور ۱۱٫۶ ٹن فی مربع انچ حاصل ہوا۔

باؤشنگر[3] نے بہت سے تجربات وولر[4] کے نہج پر کیے اور اس سے زیادہ اشیاء کا امتحان کیا۔

بسمر (Bessemer) فولاد کے لیے اس کے نتائج یہ تھے:۔

سکونی شکستی زور = ۲۸٫۶ ٹن فی مربع انچ

شکستی زور صفر سے اعظم = ۱۵٫۷ ،، ،،

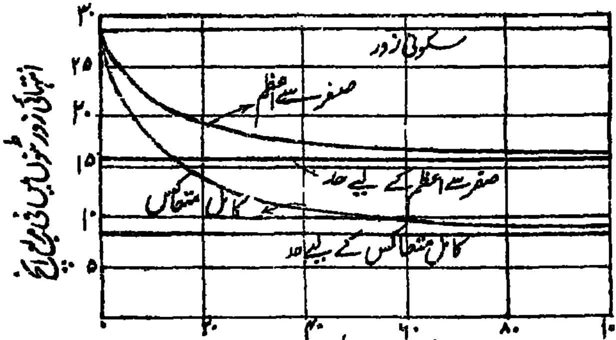
متعاکس زور کے لیے = ۸٫۵۵ ،، ،،

[1] Krupp [2] Sir Benjamin Baker

[3] Bauschinger [4] Wöhler

زور کے تغیر کے ان شکستی زوروں کے متعلق یہ معلوم ہو کہ یہ وہ کم سے کم زور ہیں جن پر نمونہ بہت بڑی تکرار کے بعد ٹوٹتا ہے۔

اس قسم کی آزمائشوں کے لیے یہ کیا جاتا ہے کہ بہت سے نمونے لیے جاتے ہیں اور مختلف نمونوں یا ان کے مختلف سٹوں کے لیے زور کے تغیر



شکل ۱۰ - زور کی تکراریں

کی وسعت مختلف رکھی جاتی ہے۔ جب یہ وسعت ایک خاص حد سے کم ہو تو نمونہ تجربے کی مدت میں نہیں ٹوٹتا۔ نتائج کو ایک نقشے کے ذریعے دکھایا جاتا ہے جس میں زور کی وسعت تکرار کی اس تعداد کے بالمقابل ترسیم کی جاتی ہے جو شکستگی کے لیے درکار ہوتی ہے۔ یا اگر تغیر صفر سے اعظم تک ہو یا زور پورا متعاکس ہو تو تکرار کی تعداد کے بالمقابل زور کی حد کو ترسیم کیا جاتا ہے۔ اس طرح کا ایک منحنی شکل ۱۰ میں دکھایا گیا ہے۔ ان منحنیوں سے وہ ظاہر زور حاصل ہوتا ہے جس کی بے انتہا تکرار شکستگی کے بغیر کی جا سکتی ہے اور اسی کو اقل شکستی زور سمجھا جاتا ہے۔ "ظاہر" کا لفظ اس لیے استعمال کیا گیا ہے کہ ۵ کرور سے زیادہ تکرار کا کوئی حوالہ موجود نہیں اور یہ خیال ہے کہ اگر اس سے زیادہ تکرار کی جائے تو ممکن ہے کہ اس سے بھی پست تر زور حاصل ہوں۔

باؤشنگر[1] نے خیال ظاہر کیا کہ کوئی شے زور کی جو وسعت برداشت کر سکتی ہے اس میں اور اس کی لچک کی حد میں کوئی ربط ہے۔ اس لچک کی حد سے

[1] Bauschinger

اس کی مراد اس کے الفاظ میں "لچک کی طبعی حد" تھی یعنی وہ حد جو شے زور کے تغیرات کے تحت آنے کے بعد رکھے کیونکہ یہ معلوم ہے کہ کسی شے میں زور ایک خاص حد سے زیادہ کیا جائے تو اس کی لچک کی حد بدل جاتی ہے۔

ڈاکٹر اسٹینٹن[1] اور مسٹر بیرسٹو[2] نے

(انسٹی ٹیوٹ آف سول انجنیرز کی روئداد جلد ۱۶۶ میں)

اس مسئلے پر ایک اہم مضمون شایع کیا ہے جس میں نیشنل فزیکل لباریٹری میں کیے ہوئے تجربات کے نتائج دیے ہیں۔

انہوں نے ایسی مشین استعمال کی جس میں نمونہ ایک بھاپ انجن کے میکانیے میں "فشارہ ڈنڈے" کے ایک حصے کے طور پر استعمال کیا گیا۔ اس طرح نمونہ راست زور کے تعاکس کے تحت آیا اور انتہائی زوروں کا تغیر میکانیے کے اضافی ابعاد کو بدلنے سے حاصل کیا گیا۔

اس تحقیق کے چند اہم نتائج ہیں جن میں سے قابلِ ذکر یہ ہیں:—

(ا) تکرار کی رفتار کو ۶۰ سے ۸۰۰ فی منٹ تک بدلنے سے نتائج پر کوئی نمایاں اثر نہیں پڑتا۔

(ب) زور کی وسعت جو متوسط بیش کاربن فولاد برداشت کرسکتے ہیں کم کاربن فولاد اور پٹواں لوہے سے مقابلۃً زیادہ ہے۔ اِس سے وولر[3] کی رائے کی تائید ہوتی ہے۔

(ج) لوہے اور فولاد کا انتہائی زور، زور کی وسعت پر منحصر ہے اور زوروں کی حقیقی قیمت پر تقریباً بالکل منحصر نہیں۔

اگرچہ ڈاکٹر اسٹینٹن اور مسٹر بیرسٹو کو اس سے اتفاق ہے کہ کوئی قطعی بیان دینے سے پہلے اور تحقیق کرنے کی ضرورت ہے لیکن ان کے تجربات سے باؤشنگر کے لچک کی حدوں کے نظریے کی تائید ہوتی ہے۔

---

[1] Dr. Stanton

[2] Mr. Bairstow

[3] Wöhler

انہوں نے یہ بھی معلوم کیا کہ کسی شے میں تراش کی ایک دم تبدیلی کی صورت میں تدریجی تبدیلی کی بہ نسبت زور کے تعاکس کی برداشت کم ہوتی ہے۔

ڈاکٹر اسمتھ[1] اور پروفیسر رینلڈز[2] نے معلوم کیا کہ ۱۳۰۰ تا ۱۶۰۰ فی منٹ کی رفتاروں کے لیے وسعت وولر کی ۶۰ فی منٹ کی رفتار پر کی وسعت سے کم ہے اور یہ کمی تقریباً ۱۰ فیصدی ہے۔ ۱۹۰۰ تا ۲۴۰۰ فی منٹ کی رفتاروں کے لیے یہ کمی بہت زیادہ ہے اور وسعت وولر کی رفتار پر کی وسعت سے تقریباً ۴۰ فیصدی کم ہے۔

حال میں ایڈن[3]، ہے[4]، ہینکنز[5]، کامرز[6]، روس[7]، اسٹینٹن[8] اور مور[9] نے جو تحقیق کی ہے اس سے پتہ چلتا ہے کہ زور کی انتہائی وسعت پر زور کے تغیر کا اثر تقریباً قابلِ نظر انداز ہے اور یہ کہ اسمتھ اور رینلڈز نے رفتار کا جو اثر معلوم کیا وہ غالباً ثانوی زوروں کی وجہ سے تھا جو اُن کی امتحانی مشینوں سے مخصوص تھے۔

اس مضمون کے مکمل بیان کے لیے قارئین ڈاکٹر گاف[10] کی کتاب "دھاتوں کی تھکن"[11] اور اُن کے اس کتاب کے بعد لکھے ہوئے ایک مضمون کا مطالعہ کریں جو رسالہ "تعمیری انجینیر" (Structural Engineer) (مارچ ۱۹۲۷ء) میں شایع ہوا۔

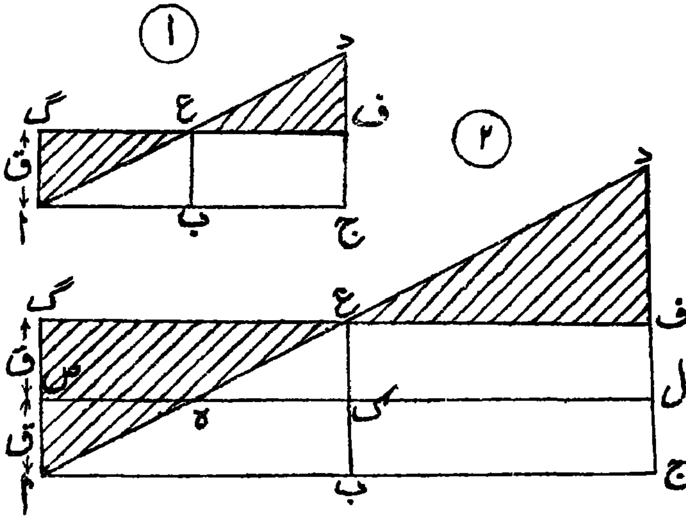
ڈھلا لوہا۔ ڈھلے لوہے کے لیے زور کی تکرار پر غالباً بہت کم کام کیا گیا ہے لیکن مصنف نے جو چند تجربات خماؤ کے ذریعے تعاکس پر کیے اُن سے یہی عام نتائج حاصل ہوئے انتہائی شکستی زور سکونی زور کا تقریباً $\frac{1}{4}$ حاصل ہوا۔

---

[1] Dr. J. H. Smith [2] Prof. Osborne Reynolds
[3] Eden [4] Haigh [5] Hankins
[6] Kommers [7] Roos [8] Stanton
[9] Moore [10] Dr.H.J. Gough [11] The Fatigue of Metals

فوری یا حرکیاتی لداؤ سے زور اور فساد۔ اگر کسی تعمیر پر ایک بوجھ دفعۃً لگایا جائے تو ارتعاش پیدا ہونگے اور فساد (اور اس طرح زور) اس کی دُگنی قیمت کو پہنچینگے جو بوجھ کے بتدریج لگائے جانے سے ہوتی۔

یہ بات شکل ع۱۱ (۱) کے نقشے کو دیکھنے سے واضح ہوگی جس میں قوت کو فساد کے بالمقابل ترسیم کیا گیا ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی لچکدار جسم پر بوجھ بتدریج لگایا جائے تو فساد اور راست زور کے بوجھ کے ربط کا منحنی ایک خطِ مستقیم ا د ہوگا اور



شکل ع۱۱۔ فوری یا حرکی لداؤ

اس خط کے نیچے کے رقبے سے کسی خاص نقطے تک کیا ہوا کام تعبیر ہوگا۔ اب فرض کرو کہ ا گ ایک قوت ق کو تعبیر کرتا ہے۔ تو جب فساد نقطہ ب تک پہنچے تو قوت کا کیا ہوا کام مستطیل ا ب ع گ کے رقبے کے مساوی ہوگا لیکن جسم میں فساد پیدا کرنے میں جو کام صرف ہوا وہ صرف مثلث ا ب ع کے رقبے کے مساوی ہے۔ اس لیے مثلث ا ع گ کے رقبہ کے مساوی کام ابھی مزید فساد پیدا کرنے کے لیے فاضل ہے۔ اس لیے فساد ابھی بڑھتا جائیگا یہاں تک کہ مثلث ع ف د کا رقبہ مثلث ا ع گ کے رقبے کے مساوی ہو جائے۔

ظاہر ہے کہ اس کے لیے ا ج = ۲ ا ب ، یعنی فساد (اور اس طرح زور) بتدریج لداؤ کے مقابلے میں دگنا ہوگا۔

اگر ایک قوت دفعۃً ـ ق سے + ق ہو جائے تو مجموعی فساد اور زور وہی ہونگے جو ۲ ق کے فوری بوجھ سے ہوتے اور اس صورت میں بھی جب فساد نقطہ ب تک پہنچیگا شکل ۱۱ (۲) تو مثلث ا ع گ کے رقبے کے مساوی کام فاضل ہوگا جو مزید فساد پیدا کریگا۔ اس طرح فساد نقطہ ج تک جاری رہیگا۔ اس طرح اعظم تنشی فساد ہ ل ہوگا۔ اگر لداؤ تدریجی ہوتا تو فساد ہ ک ہوتا اور چونکہ ہ ل = ۳ ہ ک ، اس لیے معلوم ہوا کہ اگر کسی بوجھ کو دفعۃً معکوس کر دیا جائے تو فساد اور زور اس کے تین گنے ہونگے جو اس کے بتدریج ہونے سے ہوتے۔

ان میں سے ہر صورت میں مزید فساد اور زور تغیر کی مقدار کے مساوی ہوتا ہے۔ اس طرح کے مزید زور کو "حرکیاتی اضافہ" کہا گیا ہے اور اس طرح کہا جا سکتا ہے کہ اگر ایک فوری یا حرکیاتی زور ز میں تغیرت ہو تو اس کا معادل تدریجی زور ز + ت ہوگا۔

زور کی تکرار اور فوری لداؤ کے درمیان ربط

زور کے تغیر کے تجربات کے نتائج اور فوری لداؤ کے متعلق اوپر کے استدلال کے درمیان جو مشابہت ہے اس کی وجہ سے بہت سے لوگوں کا خیال ہے کہ دونو کے تجربات دراصل فوری لداؤ کے تجربات تھے۔ ایک دوسرا خیال یہ ہے کہ یہ دونوں مسئلے دراصل علحدہ ہیں اس لیے تعمیروں کی تجویز میں ہر ایک کی علحدہ رعایت رکھنی چاہیے۔

ان دونوں مسئلوں میں مطابقت پیدا کرنے کے لیے سب میں پہلی دقت جس کا سامنا کرنا ہے یہ ہے کہ لچک کی حد کے باہر فساد زور کے متناسب نہیں ہوتا اور اس طرح اس حد کے باہر دوگنا فساد دوگنا زور نہیں پیدا کریگا

دیکھو (شکل ۲ء۱) لیکن اس کے برخلاف اس سلسلے میں ایک اور واقعہ قابل لحاظ ہے اور وہ یہ کہ اگر کسی شے میں لچک کی حد سے باہر تک زور لگایا گیا ہو تو بعد کی آزمائشوں میں پایا جاتا ہے کہ لچک کی حد بڑھ گئی۔ اس لیے اگر زور کی ہر تکرار کے ساتھ یہ عمل جاری رہے تو آخر کار لچک کی حد اتنی اونچی ہو جائیگی کہ حرکیاتی استدلال نقطۂ شکست تک صحیح رہیگا۔

اگر چہ کہ اس بحث میں بہت سے نکات تصفیہ طلب ہیں لیکن عملی وجوہ سے تعمیروں کی تجویز میں صرف ایک بات کی رعایت رکھی جاتی ہے دونوں باتوں کی نہیں۔ اس کی وجہ یہ ہے:۔ فرض کرو کہ نرم فولاد کے لیے مستقل اور تدریجی بوجھ کے لیے بے خطر عملی زور ۵ء۷ ٹن فی مربع انچ ہے۔ تب حرکیاتی نظریے نے متعاکس اور فوری بوجھ کے لیے بے خطر عملی زور اس کا $\frac{1}{3}$ یعنی ۲ء۵ ٹن فی مربع انچ ہوگا۔ اب اگر زور کی تکرار کے لیے علیحدہ رعایت رکھی جائے تو عملی زور $\frac{1}{3}$ × ۲ء۵ = ۸ء۰ ٹن فی مربع انچ رکھنا ہوگا۔

لیکن چونکہ یہاں صدامہ یا ضارب کا کوئی سوال نہیں اس لیے یہ عملی زور ضرورت سے زیادہ پست ہو گیا۔

ضرب کی وجہ سے فساد اور زور ـــــ فرض کرو کہ ایک وزن و ایک تعمیر پر بلندی ع سے گرتا ہے اور فرض کرو کہ ع کی سمت میں بگاڑ یا فساد لا ہوتا ہے (شکل ۱۲ء۱)۔ تب وزن کا کیا ہوا کام و (ع + لا) ہوگا۔ یہ کام تعمیر کے فساد میں جذب ہوگا۔ پہلے اس صورت پر غور کرو کہ یہ فساد لچک کی حد کے اندر ہے۔ اس صورت میں کام بازگشتگی × حجم کے مساوی ہوگا۔ ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ تناؤ یا فشار میں بازگشتگی $\frac{ز^2}{2 ے}$ ہوتی ہے اس لیے اس صورت میں و (ع + لا) = $\frac{حجم \times ز^2}{2 ے}$ = $\frac{ح ز^2}{2 ے}$ ۔

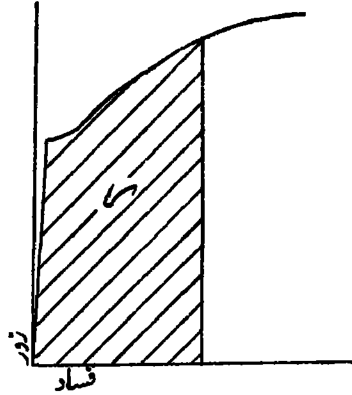
اب اگر ع کے مقابلے میں لا چھوٹا ہو تو

$$و ع = \frac{ح ز^2}{2 ے}$$

یا $ز = \sqrt{\frac{۲ ے و ع}{ح}}$



شکل ۱۲ء



شکل ۱۳ء

اگر وزن رفتار ء سے ٹکرا دے تو

$ع = \frac{ء^۲}{۲ج}$

یا $ز = \sqrt{\frac{۲ ے و ء^۲}{۲ج ح}} = ء \sqrt{\frac{ے و}{ج ح}}$

خماؤ کی بازگشتگی پر ہم شہتیروں کے خماؤ کی بحث میں غور کرینگے۔

فساد لچک کی حد سے زیادہ — اگر فساد لچک کی حد سے بڑھ جائے تو صفحہ ۳۵ پر کے استدلال سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فساد بیں کام فی اکائی حجم "زور اور فساد" کے منحنی کے نیچے کے رقبے کے مساوی ہوگا۔ اگر یہ رقبہ ہ ہو (شکل ۱۳ء) تو ہ = و ع یا $\frac{و ء^۲}{۲ج}$

اس سے زور معلوم ہو سکتا ہے۔

عددی مثال — $\frac{1}{2}$ انچ قطر کی ایک سلاخ ۱ ٹن کے ایک برقرار بوجھ کے تحت $\frac{1}{8}$ انچ کھنچتی ہے۔ اگر اس سلاخ پر ۱۵۰ پونڈ کا ایک وزن ۳ انچ کی بلندی سے گرے تو کیا زور پیدا ہوگا۔ سلاخ ابتداء میں بے زور ہے۔ ے = ۳۰ × ۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ لیا جائے۔

$\frac{1}{2}$" قطر کی سلاخ کا رقبہ = ۱۹۶ء مربع انچ

∴ ۱ ٹن بوجھ کے تحت زور = $\frac{1}{۱۹۶ء}$ ٹن فی مربع انچ

= $\frac{۲۲۴۰}{۱۹۶ء}$ پونڈ فی مربع انچ

∴ فساد = $\frac{زور}{ے}$ = $\frac{۲۲۴۰}{۱۹۶ء \times ۳۰ \times ۱۰^۶}$

اب $\frac{1}{8}$" = فساد × اصلی طول

∴ اصلی طول = $\frac{\frac{1}{8}}{فساد}$ = $\frac{۱۹۶ء \times ۳۰ \times ۱۰^۶}{۸ \times ۲۲۴۰}$

∴ حجم = طول × تراشی رقبہ

= $\frac{۱۹۶ء \times ۱۰^۶ \times ۳۰ \times ۱۹۶ء}{۲۲۴۰ \times ۸}$

= ۶۴ء۳۳ مکعب انچ

۱۵۰ پونڈ کا کام ۳ انچ گرنے میں = ۱۵۰ × ۳ = ۴۵۰ انچ پونڈ

∴ $\frac{ز^۲ \times ۶۴ء۳۳}{۲ ے}$ = ۴۵۰

یا ز = $\sqrt{\frac{۹۰۰ ے}{۶۴ء۳۳}}$

$$\left(\frac{۱۰^{۶}\times ۳۰\times ۹۰۰}{۶۴٫۳۲۳}\right)^{\frac{۱}{۲}}=$$

= ۲۰۴۸۰ پونڈ فی مربع انچ

[نوٹ۔ یہ سوال ے کی قیمت کے بغیر حل ہو سکتا تھا کیونکہ ے عمل کے دوران میں غائب ہو جاتا۔]

تپشی زور ——— فرض کرو کہ طول ل کی ایک سلاخ کو ت° ف گرم کیا جاتا ہے اور پھیلاؤ کی شرح ع ہے۔ تو اگر پھیلاؤ کو روکا نہ جائے تو سلاخ کا طول ل (۱ + ع ت) ہو جائیگا یعنی طول کا اضافہ ع ت ل ہوگا۔

اگر سلاخ اُستوارانہ ثابت ہو جس کی وجہ سے یہ پھیلاؤ واقع نہ ہو سکے تو سلاخ میں ع ت ل کا فساد ہوگا اور اکائی کا فساد $\frac{ع ت ل}{ل}$ = ع ت ہوگا۔

اس فساد سے فشاری زور ع ت × ے پیدا ہوگا جہاں ے ینگ کا مقیاس ہے۔

نرم فولاد کے لیے ع = ۰٫۰۰۰۰۰۶۵۷ فی درجہ فارن ہیٹ اور ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ

∴ زور فی درجہ فارن ہیٹ = ۰٫۰۰۰۰۰۶۵۷ × ۱۳۰۰۰

= ۰٫۰۸۵۴ ٹن فی مربع انچ

تپش کا ۱۲۰° ف کا تغیر لیا جائے تو اس کی وجہ سے زور = ۱۲۰ × ۰٫۰۸۵۴ = ۱۰٫۲۵ ٹن فی مربع انچ۔ یہ نرم فولاد کے بے خطر زور سے زیادہ ہے۔ اِس سے ظاہر ہے کہ تعمیروں کو تجویز کرتے وقت پھیلاؤ کی گنجائش رکھنا کتنا ضروری ہے۔

غیر متجانس سلاخیں راست زور کے تحت ——— اگر ایک سلاخ

دو مختلف اشیاء (مثلاً فولاد اور کنکریٹ یا فولاد اور تانبے) پر مشتمل ہو جو ایک دوسری سے مضبوط جوڑی گئی ہوں اور اس مرکب سلاخ پر کوئی کھینچ یا ڈھکیل عمل کرے تو دونوں اشیاء میں فساد مساوی پیدا ہوگا اور چونکہ دونوں اشیاء کے لیے ینگ کے مقیاس مختلف ہونگے اس لیے دونوں اشیاء میں زور مختلف ہونگے۔

فرض کرو کہ ایک شے کا تراشی رقبہ ب اور ینگ کا مقیاس ے ہے اور اس میں زور ز پیدا ہوتا ہے اور دوسری شے میں ان کی تنناظر مقداریں ب_1، ے_1، ز_1 ہیں۔

تب اگر ایک کھینچ یا ڈھکیل ق کے تحت اکائی کا فساد لا ہو تو

$$\text{لا} = \frac{\text{ز}}{\text{ے}} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{لا} = \frac{\text{ز}_1}{\text{ے}_1} \quad \ldots\ldots (2)$$

اور

$$\text{ق} = \text{ب ز} + \text{ب}_1 \text{ز}_1 \quad \ldots\ldots (3)$$

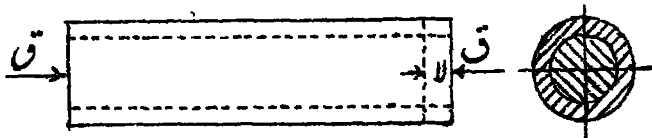
جہاں ب ز اور $\text{ب}_1 \text{ز}_1$ دونوں اشیاء کے بوجھ ہیں۔

(۱) اور (۲) سے $\text{ز}_1 = \text{ے}_1 \text{لا} = \frac{\text{ے}_1 \text{ز}}{\text{ے}}$

$$\therefore \quad \text{ق} = \text{ز}\left(\text{ب} + \frac{\text{ے}_1 \text{ب}_1}{\text{ے}}\right) \quad \ldots\ldots (4)$$

یا

$$\text{ز} = \frac{\text{ق}}{\text{ب}\left(1 + \frac{\text{ے}_1 \text{ب}_1}{\text{ے ب}}\right)} \quad \ldots\ldots (5)$$



شکل ۱۴

اب اگر ایک سلاخ بالکل پہلی شے کی لی جائے جس کا رقبہ $ب_۲$ ایسا ہو کہ بوجھ ق کے تحت اس میں یہی زور ز پیدا ہو تو

$$ز = \frac{ق}{ب_۲}$$

یا $$ب_۲ = ب\left(۱ + \frac{سے_۱ ب_۱}{سے ب}\right) \quad \ldots\ldots (۶)$$

اس مقدار $ب_۲$ کو "متجانس شے کا معادل رقبہ" کہہ سکتے ہیں اور اس مسئلے کو حال میں محکم کنکریٹ کے استعمال کی وجہ سے بہت زیادہ اہمیت حاصل ہو گئی ہے۔ اس اطلاق سے ہم باب ۱۵ میں مزید بحث کرینگے۔ عام مسئلے پر واپس آؤ تو

$$ز_۱ = \frac{ق}{ب_۱\left(۱ + \frac{سے ب}{سے_۱ ب_۱}\right)} \quad \ldots\ldots (۷)$$

یہ پہلی شے پر پڑنے والا بوجھ =

$$ز \times ب = \frac{ق}{۱ + \frac{سے_۱ ب_۱}{سے ب}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

اور دوسری شے پر بوجھ =

$$ز_۱ \times ب_۱ = \frac{ق}{۱ + \frac{سے ب}{سے_۱ ب_۱}} \quad \ldots\ldots (۹)$$

چونکہ یہ مساوی نہیں اس لیے دونوں اشیاء میں اضافی حرکت کا میلان ہوگا جس کی مزاحمت چپک کی قوت کریگی۔
یہ $ز \times ب - ز_۱ \times ب_۱$ کے مساوی ہوگی یعنی

$$= \frac{ق}{\frac{بے + ب_۱ے_۱}{بے}} - \frac{ق}{\frac{بے + ب_۱ے_۱}{ب_۱ے_۱}}$$

$$= \frac{ق \times بے}{بے + ب_۱ے_۱} - \frac{ق \times ب_۱ے_۱}{بے + ب_۱ے_۱}$$

$$= \frac{ق\,(بے - ب_۱ے_۱)}{بے + ب_۱ے_۱}$$

$$= \frac{ق\left(۱ - \frac{ب_۱ے_۱}{بے}\right)}{۱ + \frac{ب_۱ے_۱}{بے}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

اس کے متعلق مثال کے لیے محکم کنکریٹ کا باب دیکھو۔

یہاں ایک جدول منسلک ہے جس میں متعدد اشیائے تعمیر کے لچک کے خواص درج ہیں۔ اس جدول کو استعمال کرتے وقت یہ خیال رہے کہ بہت سی اشیاء کے خواص اُن کی ترکیب پر منحصر ہوتے ہیں اور ترکیب کے بدلنے سے بڑی حد تک بدل جاتے ہیں۔ اس لیے اس جدول میں دیئے ہوئے اعداد کو اسی صورت میں استعمال کیا جائے جب کہ کسی زیرِ بحث شے کی بطور خود آزمائش کر لینا ممکن نہ ہو۔

اشیاء کے لچک کے خواص

(نوٹ۔ اشیاء کے زور وغیرہ ٹن فی مربع انچ میں اور ب کے پونڈ فی مربع انچ میں ہیں)

شے	وزن فی مکعب فٹ (پونڈ)	شکستی زور			لچک کا مقیاس		لچک کی حد
		تناؤ	کچلاؤ	جز	ے	س	
نرم فولاد	۴۹۰	۲۸ تا ۳۳	—	۲۰ تا ۲۵	۱۳۴۰۰	۵۲۰۰	۱۵ تا ۲۰
پٹواں لوہا	۴۸۰	۲۰ تا ۲۵	۱۶ تا ۲۲	۱۶ تا ۱۹	۱۲۵۰۰	۵۰۰۰	۱۰ تا ۱۶
ڈھلا لوہا	۴۴۰ تا ۴۷۰	۵ تا ۱۵	۲۵ تا ۶۵	۶ تا ۱۳	۵۰۰۰ تا ۸۰۰۰	۲۵۰۰ تا ۴۰۰۰	—
تانبا	۵۴۰	۱۲ تا ۱۵	۲۰ تا ۲۵	۱۱ تا ۱۲	۷۰۰۰	—	۳ تا ۸
توپ دھات	〃	〃	۲۵ تا ۴۰	۹ تا ۱۲	۵۰۰۰	—	۵ تا ۷
پیتل	۵۲۰ تا ۵۳۰	۱۰ تا ۱۲	—	—	۶۰۰۰	—	—
چوبینہ	۳۰ تا ۶۰	۱ تا ۷	۱ تا ۶	$\frac{1}{4}$ تا ۲	۳۰۰ تا ۱۲۰۰	—	—
پورٹلینڈ سیمنٹ	۹۰	۵۵۰ تا ۷۰۰	۵۰۰۰ تا ۸۰۰۰	—	—	—	—
بجری کنکریٹ (۱:۲:۴)	۱۵۰	—	۲۴۰۰ تا ۹۰۰۰	۳۰۰	2×10^6 تا 5×10^6	—	—
〃 〃 (۱:۳:۶)	۱۴۰	—	۱۸۰۰ تا ۳۰۰۰	۲۰۰		—	—
جلے کوئلے کا کنکریٹ	—	—	۵۰۰	—	—	—	—
اینٹ (لندن اسٹاک)	۱۱۵	—	۱۲۰۰ تا ۱۸۰۰	—	—	—	—
〃 (اسٹافورڈشائر نیلی)	۱۴۰	—	۷۵۰۰	—	—	—	—
سمینٹی خشت کاری	۱۰۰ تا ۱۵۰	—	۵۰۰ تا ۱۵۰۰	—	—	—	—
پورٹ لینڈ پتھر	۱۴۵	—	۴۰۰۰ تا [illegible]	—	—	—	—
ریتیلا پتھر	۱۳۵ تا ۱۴۵	—	۵۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰	—	—	—	—
گرینائیٹ	۱۷۰	—	۱۵۰۰۰ تا ۱۵۰۰۰	—	—	—	—

باب ۲

تجویز کے اصول۔ کامی زور وغیرہ۔ ہوا کا دباؤ

تجویز کا علمی پہلو ———— ایک امریکن نے اپنی قوم کے نقطۂ نظر کے مطابق انجینیری کی کیا اچھی تعریف کی ہے کہ "انجینیر وہ شخص ہے جو ایک ڈالر کے خرچ سے وہ کام کرے جو کوئی بھی نادان دو ڈالر میں کر سکے"۔ اگرچہ فن انجینیری کی یہ تعریف بہت مادی ہے اور جمالیاتی نقطۂ نظر سے بہت پست معلوم ہوتی ہے لیکن یہ یاد رہے کہ سب میں زیادہ سائنٹفک تعمیر وہی ہے جو کم ترین لاگت کی شرط کو پورا کرے۔ اب لوگوں کو عادت ہو گئی ہے کہ قدیم زمانے کی حیرت انگیز تعمیروں کو دیکھ کر کہتے ہیں کہ ایسی تعمیریں اس زمانے میں نہیں بنائی جا سکتیں۔ یہ صحیح ہے لیکن اس کی وجہ یہ نہیں کہ ہم میں وہ ہنرمندی باقی نہیں رہی بلکہ ہم اب اتنا صرفہ برداشت نہیں کر سکتے۔

دراصل فن تجویز کے نظریے اور عمل میں باہم کوئی لاگ نہیں۔ دونوں ضروری چیزیں ہیں اور دونوں ایک دوسرے کے محتاج ہیں۔ نظریۂ تعمیر میں یہ بتایا جائیگا کہ کفایت کے نقطۂ نظر سے بہترین تجویز کون سی ہے۔ بہترین طور پر تجویز کی ہوئی تعمیر وہ ہے جو تمام مقامات پر یعنی تراشوں پر ایک ہی وقت میں جواب دے، یا بالفاظ دیگر جس کے مختلف حصے اس طرح تجویز کیے گئے ہوں کہ ان میں زور مساوی ہوں۔ نظریے کا کام بس اتنا ہے۔ اس کے برخلاف عملی تجویز میں یہ دیکھا جاتا ہے کہ آیا نظری تجویز تمام باتوں کا لحاظ کرتے انجام کار درحقیقت ارزاں ترین ہو گی

پا نہیں۔ اس کے لیے کاریگری اور تعمیر کو کھڑا کرنے اور اس کی نگہداشت کی لاگت کے مسئلے پر غور کرنا ہوگا اور ان مسائل کو نظریے کے ساتھ ملا کر غور کرنے سے ہی حقیقی سائنٹفک تجویز حاصل ہوتی ہے۔

تجویز کے نظری پہلو سے بحث کرنے وقت اس بات کو بھول نہیں جانا چاہیے کہ اگر نظریے کی پابندی کرنا ضروری ہے تو بہترین نظریہ استعمال کرنا چاہیے۔ خالص عملی آدمیوں کی نظر میں نظریے کی وقعت نہ ہونے کی وجہ یہ ہے کہ ان کا نظری علم کافی گہرا نہیں ہوتا۔ ان کو ان شرائط کا پورا علم نہیں ہوتا جن کا پورا ہونا کسی نظریے کے قابل اطلاق ہونے کے پیشتر ضروری ہے اور اس طرح وہ کوئی ایسا ضابطہ استعمال کر لیتے ہیں جو غالباً زیر تجویز صورت کے لیے بنایا ہی نہیں گیا۔

ایک اور بات یاد رکھنا چاہیے اور وہ یہ ہے کہ تجویز میں جو عملی قاعدے مستعمل ہیں ان کو محض اس وجہ سے درست نہیں سمجھا جا سکتا کہ جو تعمیریں ان کی رو سے بنائی جاتی ہیں وہ اپنا کام بخوبی انجام دیتی ہیں۔ ممکن ہے کہ یہ تعمیریں ضرورت سے زیادہ وزنی اور جسیم اور گراں ہوں۔ نظری تحقیقات میں ہمارا مقصد یہ ہونا چاہیے کہ تجویز کے غیر معین اور مشکوک نکات کو جہاں تک ہو سکے دور کریں اور صرف اس بات پر قانع نہ ہوں کہ ایسی تعمیر تیار کریں جو کھڑی رہے۔

تجویز کا تجارتی پہلو ۔۔۔۔۔ اگر لفظ "سائنٹفک" اپنے صحیح معنوں میں استعمال کیا گیا ہو تو تجارتی پہلو سائنٹفک پہلو سے زیادہ مختلف نہیں ہوتا۔ تاہم بعض باتیں ایسی ہیں جو خاص تجارتی پہلو کے اندر آتی ہیں۔ اولاً یہ سوال ہے کہ تعمیر کے مختلف ارکان کی تراشیں کیا اختیار کی گئی ہیں۔ اس کا خیال رکھنا چاہیے کہ جہاں تک ہو سکے ایک ہی تراش اختیار کی جائے اور یہ تراش آسانی سے دستیاب ہو سکنی چاہیے۔ کسی خاص تعمیر کی لاگت محض اس وجہ سے بہت بڑھ جا سکتی ہے کہ ایک ایسی تراش کی تخصیص کی گئی جس کو

خاص طور پر بیلنا پڑے ۔ (اگرچہ کارخانوں کی شایع کردہ فہرستوں میں تراشیں درج رہتی ہیں لیکن یہ ہمیشہ آسانی سے دستیاب نہیں ہوسکتیں)۔ ریوٹ کاری میں بعض اوقات لاگت اس وجہ سے بہت بڑھ جاتی ہے کہ ریوٹوں کی گھائی غیر ضروری طور پر بے قاعدہ رکھی گئی اور اکثر اوقات ایسے نمایشی کلیٹ دار جوڑ تجویز کئے جاتے ہیں جن کو سادہ جوڑوں پر کوئی برتری نہیں ہوتی - آیندہ ابواب میں جب ہم علٰحدہ تجویزوں سے بحث کرینگے تو ان باتوں پر زیادہ تفصیل سے غور کیا جائیگا

مجوِز کو تجویز میں منحنی خطوط سے جہاں تک ہوسکے احتراز کرنا چاہیے تختیوں کو منحنی کی شکل میں کاٹنے میں بہت صرفہ ہوتا ہے اور عموماً ان سے کوئی فائدہ نہیں ہوتا۔ بعض لوگ یہ کہینگے کہ گولائی دار شکلیں دیکھنے میں زیادہ بھلی معلوم ہوتی ہیں اور بعض لوگ تختی دار گرڈروں کی تختیوں پر ڈھلے لوہے کی زیبائیشی پٹیاں تک لگاتے ہیں۔ لیکن حقیقت یہ ہے کہ فولاد کی کوئی تعمیر حسن کاری کے نقطۂ نظر سے خوبصورت نہیں ہوتی اور گولائی دار کلی تختیوں اور زیبائیشی پٹیوں کے ذریعہ اس کو سجانے کی کوشش اس کو اَور زیادہ بدنما بنانا ہے کیونکہ اس سے صرفے کا صرفہ بڑھ جائیگا اور تعمیر پھر بھی حُسن کار کی نظر میں جیسی کی ویسی بدصورت رہیگی۔ منحنی ارکان پر ایک نظری اعتراض بھی ہے اور وہ یہ کہ ایسی سلاخوں پر بوجھ خارج المرکز ہوتا ہے جس سے زور بہت بڑھ جاتے ہیں۔

اگر عملاً نظریے کے کسی قدر خلاف کرنا پڑے تو حسابات میں اس کا ضرور خیال رہے ۔ مثلاً نظری طور پر T تراش میں ریوٹوں کا مرکزی خط تراش کے مرکزِ ہندسی میں کے خط پر منطبق ہونا چاہیے ۔ عملاً یہ ناممکن ہے کیونکہ اس صورت میں ریوٹ (Rivet) کے سر کو بند نہیں کیا جاسکتا ۔ اس لیے جن تعمیروں میں ایسی تراشوں کو بطور بند حسن یا داب روک کے استعمال کیا جائے اُن کی تجویز کرتے وقت یہ یاد رکھنا چاہیے کہ بوجھ خارج المرکز ہے اور اس کی رعایت ملحوظ رکھنی چاہیے۔

کامی زور اور قدرِ سلامتی ــــ عملاً کامی زور کیا اختیار

ــــہ rosette = گلبند

کیے جائیں یہ مسئلہ بے حد اہم ہے اور اگر تجویز کو فی الحقیقت مفید بنانا ہو تو کامی زوروں کا صحیح علم اور اندازہ ہونا چاہیے۔

کامی زوروں سے بحث کرتے وقت **قدرِ سلامتی** کا اکثر نام لیا جاتا ہے۔ اس کی تعریف یہ کی جاسکتی ہے کہ یہ وہ جزوِ ضربی ہے جس سے کامی زور کو ضرب دینے سے ناکارگی کا زور حاصل ہو۔ یہ فقرہ اکثر بغیر سمجھے بوجھے استعمال کیا جاتا ہے۔ اکثر صورتوں میں اس کو "لاعلمی کی رعایت" کہنا بہتر ہوگا۔ کیونکہ اگر ایک تعمیر کسی قدرِ سلامتی مثلاً ۴ کے ساتھ تجویز کی جائے تو بالعموم اس سے مراد یہ نہیں ہوتی کہ مجوزہ بوجھ کا ۴ گنا بوجھ بغیر ناکارگی کے برداشت ہو سکیگا کیونکہ بعض امور ایسے ہوتے ہیں جن کی رعایت تجویز میں نہیں رکھی جاتی۔ لیکن ہمارا مقصد یہ ہونا چاہیے کہ حسابات اس طرح پر کیے جائیں کہ قدرِ سلامتی حقیقی معنوں میں قدرِ سلامتی ہو۔ اور یہ اسی طرح ہو سکتا ہے کہ کامی زور ہوشیاری کے ساتھ انتخاب کیے جائیں اور تجویز کے اندر ممکنہ باتوں کا خیال رکھا جائے۔ فولاد کی تعمیروں میں دستور یہ ہے کہ تناؤ کا کامی زور تناؤ کے شکستی زور کا ایک چوتھائی لیا جاتا ہے اور کہا جاتا ہے کہ قدرِ سلامتی ۴ ہے۔ لیکن بہت سے تجویز کرنے والے زندہ یا متغیر بوجھ کی رعایت رکھنا بھول جاتے ہیں۔ نیز قدرِ سلامتی کو شکستی زور کے حوالے سے اختیار کرنے پر بھی ایک اعتراض وارد ہوتا ہے اور وہ یہ ہے کہ کسی تعمیر کی ناکامی کو قرار دینے والی چیز دراصل مسالے کی لچک کی حد ہے۔ اگر زور لچک کی حد سے زیادہ ہوں تو ناکارگی کا واقع ہونا تقریباً یقینی ہے خاص کر فشاری ارکان یا داب روکوں میں۔ پروفیسر آرنلڈ نے اس نکتے کی طرف مزید توجہ مبذول کرائی ہے اس لیے بہتر ہوگا کہ کامی زور کو لچک کی حد کے حوالہ سے اختیار کیا جائے اور فولاد میں لچک کی حد کی ایک اقل قیمت کی تخصیص کی جائے۔ بعض لوگ اس پر یہ اعتراض کرتے ہیں کہ لچک کی حد شکستی زور سے ایک بہت زیادہ متغیر مقدار ہے تو یہ واقعہ دراصل اس طریقِ عمل کی موافقت میں ہے نہ کہ مخالفت میں۔ یہ یقینی ہے کہ لچک کی حد کے باہر کے زور کسی تعمیر کے لیے بھی بہت نقصان رساں

ہوتے ہیں اور اگر یہ حد متغیر ہے تو ہم کو لازم ہے کہ کسی شے کو استعمال کرنے سے پہلے اس کی یہ حد معلوم کرلیں اور کامی زور اس کے مطابق اختیار کریں۔ ہمارا خیال ہے کہ مردہ بوجھ یا اسکونی کامی زور لچک کی حقیقی حد کے نصف سے کبھی زیادہ نہیں ہونا چاہیے۔

تجویز میں مُردہ بوجھوں کے لیے کامی زور اختیار کرنے کے لیے ذیل کی جدول استعمال کی جاسکتی ہے:—

شے	کامی زور			زور کی اکائی
	تناؤ	فشار	جز	
نرم فولاد	۷	۸ تا ۶	۵	ٹن فی مربع انچ
پٹواں لوہا	۵	۴	۴	"
ڈھلا لوہا	½	۷	½	"
شاہ بلوط	۱۶	۱۳	۵ (ریشوں کے علی القوائم)	ہنڈرڈ ویٹ فی مربع انچ
صنوبر زرد	۱۰	۸	۵ " "	" "
سیمنٹ کنکریٹ ۱:۲:۴	—	۶۰۰ (خماؤ) ۵۰۰ (راست)	۶۰	پونڈ فی مربع انچ
گرینائیٹ	—	۴۰	—	ٹن فی مربع انچ
ریتلا پتھر / پارک پتھر	—	۲۵	—	"
چونا پتھر	—	۱۵	—	"
خشت کاری سیمنٹی گچ میں	—	۲۰	—	"
نیلی خشت کاری معمولی گچ میں	—	۸	—	"
خشت کاری چونا گچ میں	—	۵	—	"

"زندہ" یا متغیر بوجھوں کی رعایت

——— زندہ بوجھوں کی

رعایت کے دو طریقے ہیں جن کی غایت ایک ہی ہے :۔

(ا) معادل مُردہ بوجھ والا طریقہ —— اِس طریقے میں سکونی زور استعمال کیے جاتے ہیں اور بوجھوں کو ایک طریقے سے بڑھا کر معادل مردہ بوجھ حاصل کیا جاتا ہے۔ اِس معادل مردہ بوجھ کو حاصل کرنے کے طریقے حسب ذیل ہیں :۔

(۱) معادل مُردہ بوجھ = مردہ بوجھ + ۲ × زندہ بوجھ

اِس کو حرکیاتی ضابطہ کہا جا سکتا ہے۔

(۲) معادل مردہ بوجھ

$$\text{و}_{\text{م}} = \frac{\text{ن غ} + \sqrt{\text{ن}^{2}\,\text{غ}^{2} + 4\left(\text{و} - \frac{\text{غ}}{2}\right)^{2}}}{2}$$

جہاں غ بوجھ کا تغیر ہے اور و اعظم بوجھ ہے۔ ن ایک مستقل ہے جس کی قیمت فولاد کے لیے ۱٫۱۵ لی جا سکتی ہے۔ یہ ضابطہ اُس ضابطے سے اخذ کیا گیا ہے جو اِوِن نے وولر کے تجربات کے لیے بنایا ہے۔

فولاد کے لیے معادل مردہ بوجھ حسب ذیل ہوگا :۔

$$\text{و}_{\text{م}} = \frac{1{,}15\,\text{غ} + \sqrt{1{,}3225\,\text{غ}^{2} + 4\left(\text{و} - \frac{\text{غ}}{2}\right)^{2}}}{2}$$

اگر تغیر صفر سے اعظم قیمت تک ہو تو غ = و اور تب

$$\text{و}_{\text{م}} = 1{,}2\,\text{و}$$

(۳) معادل مردہ بوجھ = اعظم بوجھ + تغیر

(ب) متغیر کامی زور والا طریقہ —— اِس طریقے میں کامی زور کو زندہ اور مردہ بوجھوں کی اضافی قیمتوں کے لحاظ سے بدلا جاتا ہے۔ اس کے زیادہ مستعمل طریقے یہ ہیں :۔

(۱) لاؤن ھارٹ ویراش[۱] کا طریقہ۔

$$\text{کامی زور} = \frac{\text{ز}}{۱٫۵}\left(۱ + \frac{\text{اقل بوجھ}}{۲\times\text{اعظم بوجھ}}\right)$$

جہاں ز سکونی یا مردہ بوجھ کے تحت کا کامی زور ہے۔

(۲) حرکیاتی طریقہ۔

$$\text{کامی زور} = \frac{\text{ز}}{۱+\frac{\text{زندہ بوجھ}}{\text{مجموعی بوجھ}}}$$

جہاں ز سے مراد اوپر کی طرح ہے۔

ایک آسان عددی مثال کے طور پر ایک چھت قینچی کے ایک رکن پر غور کرو جس میں مردہ بوجھ ۵ ٹن کا تناؤ ہے اور ایک طرف کی ہوا سے ۲ ٹن کا تناؤ اور دوسری طرف کی ہوا سے ۱ ٹن کا فشار پیدا ہوتا ہے۔ اوپر کے مختلف طریقوں سے حسب ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں:—

(الف) (۱) معادل مردہ بوجھ = ۵+۲×۲ = ۹ ٹن

(۲) ,, ,, $= \frac{\sqrt{{}^{۲}(\frac{۳}{۲}-۷)۴+۹\times۲٫۲۵}+۳\times۱٫۵}{۲}$

= ۸٫۲ ٹن

(۳) ,, ,, = ۷+۳ = ۱۰ ٹن

(ب) (۱) $\text{کامی زور} = \frac{\text{ز}}{۱٫۵}\left(۱+\frac{۴}{۱۴}\right) = \frac{۶\,\text{ز}}{۷}$

(۲) ,, ,, $= \frac{\text{ز}}{۱+\frac{۲}{۷}} = \frac{۷\,\text{ز}}{۹}$

اگر بندھن نرم فولاد کا ہو تو

(ب) (۱) اسے کامی زور = ۶ ٹن فی مربع انچ

(۲) ,, ,, = ۴٫۵ ,, ,,

[۱] Launhardt-Weyrauch

نرم فولاد کی صورت میں بندھن کی تراش کے رقبے میں مربع انچوں کی مطلوبہ تعداد حسبِ ذیل ہوگی :—

(الف) (۱) $\frac{۹}{۷}$ = ۱٫۲۸ مربع انچ
(۲) $\frac{۸٫۲}{۷}$ = ۱٫۱۷ ”
(۳) $\frac{۱۰}{۷}$ = ۱٫۴۳ ”
(ب) (۱) $\frac{۷}{۹}$ = ۱٫۱۷ ”
(۲) $\frac{۷}{۵٫۴}$ = ۱٫۳۰ ”

اگر زور کے تغیر کو بالکل نظر انداز کر دیا جائے تو مطلوبہ رقبہ

$$= \frac{۲+۵}{۷} = ۱ \text{ مربع انچ}$$

ہوا کا دباؤ

ہوا کے دباؤ کا مضمون اپنی نوعیت ہی میں نظریۂ تعمیر کا ایک تکلیف دہ حصہ ہے۔ ۱۸۷۹ء میں ٹے (Tay) کے پل کے حادثے تک انجینیروں نے اس مضمون پر زیادہ توجہ نہیں کی تھی اور اگرچہ اُس کے بعد سے بہت سی مفید معلومات فراہم کی گئی ہیں لیکن اب بھی ہم کو ایسی تعمیروں پر ہوا کے عمل کا کوئی قطعی علم حاصل نہیں جو اور تعمیروں کے قریب واقع ہوں۔ ہوا کا دباؤ تجربے کے ذریعے تین بڑے طریقوں پر معلوم کیا گیا ہے :—

(۱) ہوا سے ریل کے جوڑیے وقتاً فوقتاً اُلٹ گئے اُن کی صورت میں ہوا کا دباؤ محسوب کیا گیا جو ان کو اُلٹ دینے کے لیے ضروری تھا۔ اس طرح جو اعظم دباؤ حاصل ہوا وہ تقریباً ۳۰ پونڈ فی مربع فٹ ہے۔

(۲) ہوا کی رفتار باد پیما (anemometer) سے ناپی گئی اور اس سے دباؤ محسوب کیا گیا۔ اس کے لیے اسمیٹن[۱] نے ۱۷۵۹ء میں ایک ضابطہ

[۱] Smeaton

شایع کیا $د = ۰۰۵. ی^۲$ جہاں ی رفتار میل فی گھنٹہ میں ہے اور دباؤ پونڈ فی مربع فٹ میں۔ آج کل سمجھا جاتا ہے کہ اس ضابطے سے دباؤ کی قیمت بہت زیادہ حاصل ہوتی ہے اور نیشنل فزیکل لیبارٹری (یعنی انگلستان کے سرکاری معمل طبیعیات) میں جو تجربات کیے گئے ہیں (انسٹی ٹیوٹ آف سول انجنیئرز کی رُوداد جلد ۱۵۶) اُن سے ضابطہ $د = ۰۰۳. ی^۲$ اخذ کیا گیا ہے۔

(۳) ہوا کے زیر عمل تختیوں پر دباؤ محسوب کیا گیا۔ اس قسم کے بہت سے کارآمد تجربات سر بی۔ بیکر[۱] نے فورتھ[۲] کے پل کی تعمیر سے پہلے کیے اور اس کے بعد سے اب تک اعداد و شمار محفوظ رکھے گئے ہیں۔ ذیل کے اعداد سے جو مسٹر ایڈم ہنٹر[۳]۔ اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای کے ایک قابل تعریف مقالے سے لیے گئے ہیں (جون نمبر) انسٹی ٹیوٹ آف انجنیئرز کا رسالہ جلد ۱، نمبر ۲) ان میں سے چند تجربات سے حاصل شدہ اعظم قیمتیں معلوم ہوتی ہیں:—

سنہ	تاریخ		دباؤ پونڈ فی مربع فٹ میں: گھومتا ہوا گیج ۱٫۵ مربع فٹ	چھوٹا ثابت گیج ۱٫۵ مربع فٹ	بڑا ثابت گیج ۳۰۰ مربع فٹ	بڑے ثابت گیج کے مرکز پر ۱٫۵ مربع فٹ	بڑے گیج کا دایاں بالائی حصہ	ہوا کی سمت
۱۸۸۴	۲۷	اکتوبر	۲۹	۲۳	۱۸	—	—	جنوب مغرب
”	۲۸	”	۲۶	۲۹	۱۹	—	—	”
۱۸۸۵	۲۰	مارچ	۳۰	۲۵	۱۷	—	—	مغرب
”	۴	دسمبر	۲۵	۲۷	۱۹	—	—	”
۱۸۸۶	۳۱	مارچ	۲۶	۳۱	۱۹	۲۸٫۵	۲۳٫۰	جنوب مغرب
۱۸۸۷	۳	فروری	۲۶	۴۱	۱۵	—	—	”
۱۸۸۸	۵	جنوری	۲۷	۱۶	۷	—	—	جنوب مشرق
”	۱۷	نومبر	۳۵	۴۱	۲۷	—	—	مغرب
۱۸۸۹	۲	”	۲۷	۳۴	۱۳	—	—	جنوب مغرب
۱۸۹۰	۱۹	جنوری	۲۷	۲۸	۱۶	—	—	”
”	۲۱	”	۲۶	۲۸	۱۵	—	—	مغرب
”	۲۵	”	۲۷	۲۴	۱۸	۲۳٫۵	۲۲	مغرب جنوب مغرب
اوسط			۲۷٫۶	۲۹٫۸	۱۶٫۹	—	—	— —

۱ Sir B. Baker ۲ Forth ۳ Mr. Adam Hunter

پُل کی تعمیر کے بعد سے اعداد و شمار چھوٹے کھمبوں سے لیے گئے جن کا رقبہ ۱ء۵ مربع فٹ تھا اور جو بلند آب لیول سے مختلف بلندیوں پر رکھے گئے تھے۔ ذیل کے اعداد سے درج شدہ اعظم دباؤ معلوم ہوتے ہیں۔ ۲۱۴ فٹ کی بلندی کے لیے دو خانے ہیں جو پُل کے دونوں سروں کے لیے ہیں۔

سنہ	تاریخ	دباؤ (پونڈ فی مربع فٹ) مختلف بلندیوں پر				
		۵۰ فٹ	۱۶۳ فٹ	۲۱۴ فٹ	۲۱۴ فٹ	۳۷۸ فٹ
۱۹۰۱	۲۶ جنوری	--	۱۵	۲۵	—	۶۵
"	۲۳ نومبر	—	۵۰	۵۵	۵۵	۶۰
۱۹۰۲	۱۳ دسمبر	—	۲۷ء۵	۳۱	۳۴	۱۸
۱۹۰۳	۱۰ جنوری	۱۵	۲۰	۲۵	۲۷ء۵	۶۰
"	۳۱ "	—	۱۹ء۵	۲۹	۲۶	۶۵
"	۱۸ مارچ	۲۰	۲۰	۲۵	۲۹	۳۱
"	۲۱ "	۱۰	۲۰	۲۰	۲۲ء۵	۵۴
۱۹۰۴	۲۶ "	—	۲۰	۳۲	۲۷	۵۲
"	۲۹ دسمبر	--	۲۲ء۵	۲۲ء۵	۳۲ء۵	—
۱۹۰۵	۲۱ جنوری	—	۲۱	۲۰	۲۳	—
"	۱۸ مارچ	—	۳۴ء۵	۳۲ء۵	۴۲	۶۰
"	۲۸ فروری	۱۰	۲۳	۲۰	۲۰	۳۸
۱۹۰۶	۲۶ جنوری	۱۵	-	-	—	۵۹
"	۱۱ "	۱۰	۲۰	۲۳ء۵	۲۵	۳۰
"	۸ فروری	۱۰	۱۵	۲۵	۲۵	۵۵
اوسط		۱۳ء۰	۲۳ء۰	۲۸ء۰	۳۰ء۰	۵۰ء۰

اِن تجربات سے جن میں تختے انتصاباً لگائے گئے تھے حسب ذیل نتائج اخذ کیے جا سکتے ہیں:۔

(۱) ہوا کا دباؤ بلندی کے ساتھ بڑھتا ہے۔ اِس کی توجیہ یوں کی جا سکتی ہے کہ زمین، ہوا کو پیچھے گھسیٹتی ہے یعنی رگڑ کا عمل کرتی ہے۔

(۲) چھوٹی سطحوں پر دباؤ بڑی سطحوں سے خاصا زیادہ ہوتا ہے کیونکہ ہوا مقامی جھونکوں کا عمل کرتی ہے۔ اوپر کے تجربوں میں گھومتا تختہ ہمیشہ ہوا کے رُخ رکھا گیا اور ثابت تختہ مشرق اور مغرب کے رُخ رکھے گئے۔ اِن اعداد سے یہ نتیجہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ کسی بڑے رقبہ پر اوسط دباؤ اُس دباؤ کا تقریباً دو تہائی ہوگا جو اس نواح کے بادپیما (Anemometer) کے اندراجات سے حاصل ہو۔

(۳) کوئی چھوٹا رقبہ ایک بڑے رقبے سے گھرا ہوا ہو تو اس پر دباؤ ایک علیحدہ چھوٹے رقبے کے مقابلے میں کم ہوتا ہے لیکن یہ فرق بہت زیادہ نہیں ہوتا۔ اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ کناروں کا اثر کچھ زیادہ قابلِ لحاظ نہیں۔

چونکہ بڑے رقبوں پر دباؤ ۳۰ پونڈ فی مربع فٹ سے شاذونادر ہی زیادہ ہوتا ہے اس لیے مسٹر ہنٹر[۵] نے مذکورۂ بالا پرچے میں خیال ظاہر کیا ہے کہ عملاً تجویز کو ۳۰ پونڈ فی مربع فٹ پر مبنی رکھنا کافی ہے۔

یہ خیال بہت معقول معلوم ہوتا ہے بشرطیکہ زوروں کے حساب میں ہوا کے دباؤ کو زندہ بوجھ سمجھا جائے۔

مختلف ماہرینِ فن اور مختلف ضوابط ۳۰، ۴۰، ۵۰ اور ۵۶ پونڈ فی مربع فٹ کے دباؤ اختیار کرتے ہیں اور جب یہ بڑی قیمتیں اختیار کی جائیں اس وقت ہوا کے دباؤ کو مُردہ بوجھ سمجھا جا سکتا ہے۔

ہوا کے دباؤ کی سمت اور مائل سطحوں پر دباؤ — ہوا کے دباؤ کو ہمیشہ اس کی زیرِ عمل سطح پر عمود وار سمجھا جاتا ہے۔

---

[۵] Mr. Hunter

اگر سطح انتصابی نہ ہو بلکہ انتصابی سمت سے کوئی زاویہ بنائے تو اس پر ہوا کا دباؤ انتصابی سطح پر کے دباؤ کی رقوم میں معلوم کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ سطح افقی سطح سے زاویہ ط بناتی ہے اور انتصابی سطح پر دباؤ $د_{ص}$ ہوتا ہے۔ تب ہٹن[1] کے تجربات پر جو ضابطہ مبنی ہے اس کی رو سے

$$د_{ط} = د_{ص} \ \text{جب}\ ط^{\,۱٫۸۴\ \text{جم}\ ط - ۱}$$

اور دوشمین[2] کے ضابطہ کی رو سے

$$د_{ط} = د_{ص} \cdot \frac{۲\ \text{جب}\ ط}{۱ + \text{جب}^{۲}\ ط}$$

پروفیسر کارل پیرسن[3] نے ایک بہت آسان قاعدہ تجویز کیا ہے جو یہ ہے کہ $د_{ص}$ کو ۵۰ پونڈ فی مربع فٹ لیا جائے اور $د_{ط}$ کی قیمت ط = ۵۰° تک اتنے پونڈ فی مربع فٹ لی جائے جتنے کہ ط میں درجوں کی تعداد ہے اور ط = ۵۰° سے اوپر $د_{ط}$ کی قیمت ۵۰ پونڈ فی مربع فٹ لی جائے۔

اس قاعدے کو عام جملے کی شکل میں یوں بیان کر سکتے ہیں کہ ط = ۵۰° تک $د_{ط} = \frac{د_{ص} \times ط}{۵۰}$ اور اس کے آگے $د_{ط} = د_{ص}$

اگرچہ اس بات کا لحاظ کرتے کہ ہوا کے دباؤ کے تجربات بہت نازک اور صحیح نہیں ہوتے ہٹن کا ضابطہ بہت پیچیدہ معلوم ہوتا ہے لیکن زیادہ تر اسی کو اختیار کیا گیا ہے اس لیے ہم اس کے ساتھ استعمال کرنے کے لیے ذیل کی جدول یہاں دیتے ہیں۔ اس جدول میں جو کسریں دی گئی ہیں ان سے $د_{ص}$ کو ضرب دینے سے $د_{ط}$ حاصل ہوگا:-

[1] Hutton

[2] Duchemin

[3] Prof. Karl Pearson

ط	۵°	۱۰°	۲۰°	فصل/۴ [1]	۳۰°	۴۰°	۵۰°	۶۰°	۷۰°	۸۰°	۹۰°
—	۰٫۱۲۵	۰٫۲۴	۰٫۴۵	۰٫۵۹	۰٫۶۶	۰٫۸۳	۰٫۹۵	۱٫۰۰	۱٫۰۲	۱٫۰۱	۱٫۰۰

ستونوں اور دُود کشوں پر ہوا کا دباؤ —— مربع تراش کے ستونوں اور دُود کشوں پر ہوا کے مجموعی دباؤ کو مرکزِ ہندسی پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جاسکتا ہے اور اس کی مقدار دص × ب لی جاسکتی ہے جہاں ب انتصابی تراش کا رقبہ ہے۔

مدور تراشوں کے لیے دباؤ = ۰٫۵ دص × ب
مسدس (شش پہلو) " " = ۰٫۶۵ دص × ب
مثمن (ہشت پہلو) " " = ۰٫۷۵ دص × ب

چھتوں پر ہوا کا دباؤ (اسٹینٹن کے تجربات) ——

چند کارآمد تجربات سے جو ڈاکٹر اسٹینٹن نے انگلستان کے قومی معملِ طبیعیات (نیشنل فزیکل لیبارٹری) میں چھتوں پر ہوا کے دباؤ کے متعلق کیے ہیں ثابت ہوتا ہے کہ بعض صورتوں میں چھت کی بادپشت جانب ایک چوس دباؤ ہوتا ہے جس سے چھت کے مختلف ارکان کے زوروں میں قابلِ لحاظ فرق واقع ہوتا ہے۔ چھتوں کے حسابات میں بہت کم مجوزوں نے اس بات کا لحاظ رکھا ہے لیکن یہ مسئلہ خاصا اہم ہے اور یا تو ان تجربات کے نتائج کی تردید ہونا چاہیے یا تجویز میں ان کا خیال رکھا جانا چاہیے۔

ان تجربات میں چھت کے نمونے ایک فولادی شہ کڑی پر مشتمل تھے اور چھت کے زاویہ کو ۳۰° سے ۰° تک بدل سکنے کا انتظام رکھا گیا تھا۔ شہ کڑی پر مہاگنی کے تختے ۸ فٹ × ۷ فٹ کے تھے۔

حسبِ ذیل نتائج حاصل ہوئے :-

[1] چھت قینچیوں کے لیے یہی گھائی عام طور پر مستعمل ہے یعنی ارتفاع = فصل/۴

میلان	دباؤ فی مربع فٹ ر = ۲۰ میل فی گھنٹہ کے لیے	
	بادرخ	بادپشت
°۹۰	+ ۱٫۳۵	+ ٫۱۵
°۴۵	+ ۱٫۱۳	۰
°۳۰	+ ٫۶۱	− ٫۱۶

چھتوں پر ہوا کے دباؤ کے متعلق ذیل کے نتائج اخذ ہوئے جن سے تجویز کے قواعد بنانے چاہییں:—

ضابطہ

$$د = ک ر^2$$

جس میں

د = دباؤ پونڈ فی مربع فٹ میں

ر = رفتار میل فی گھنٹہ میں

استعمال کرنے کے لیے ک کی قیمتیں یہ ہونگی:—

(ا) ہوا ستونوں کے درمیان سے گزرتی ہوئی —

	ک کی قیمت		
	°۹۰	°۴۵	°۳۰
بادرخ	٫۰۰۳۴	٫۰۰۲۸	٫۰۰۱۵
بادپشت	صفر	صفر	صفر

(ب) عمارت کے اندر دباؤ ممکن ——

	ک کی قیمت		
	۹۰°	۴۵°	۳۰°
باد رُخ	+۰۰۳۴ک	+ ۰۰۲۸ک	+ ۰۰۱۵ک
باد پشت	–۰۰۳۲ک	—	–۰۰۲۲ک

ہوا کے دباؤ کے متعلق اوپر جو بیان لکھا گیا ہے اس سے اس کتاب کے پڑھنے والوں کو کافی معلومات ہو گئی ہونگی کہ تجویز میں ہوا کا دباؤ فی مربع فٹ کیا اختیار کیا جائے۔ ہوا کے دباؤ سے جو زور پیدا ہوتے ہیں اُن کو محسوب کرنے کا طریقہ ہم آگے چل کر بتائینگے خاص کر چھت قینچیوں کے ہوا کے زور زیادہ تفصیل کے ساتھ ڈھانچہ دار تعمیروں والے باب میں بیان کیے جائینگے۔
اسٹینٹن کے ہوا کے دباؤ کے تجربات کے لیے دیکھو ضمیمہ صفحہ ....

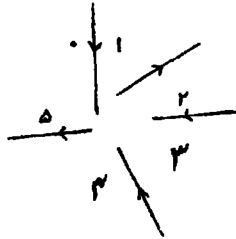


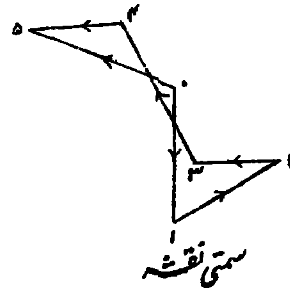
باب ۳

قوتیں، رسّے، قینچے اور معیار

قوتوں کے نظام کے حاصل کی ترسیمی بحث

قوتیں گردشہ مقداریں ہیں یعنی وہ مقدار، سمت، اور محل میں خطوطِ مستقیم سے تعبیر کی جاسکتی ہیں۔ اس طرح "سمتی جمع کے قانون" سے جو یہ ہے کہ سمتی مقداروں کی (یعنی اُن کی جن کی مقدار اور سمت ہو لیکن محل نہ ہو) کسی تعداد کا حاصل جمع یا حاصل اس طرح حاصل ہوسکتا ہے کہ اُن کو یکے بعد دیگرے سرے سے سرا ملاکر رکھا جائے، سمت وہی رکھی جائے اور اُن کے تیروں کے سرے





شکل ۱۵ سمتی کثیر الاضلاع کی ساخت

مسلسل سمتوں میں ہوں۔ اخیر میں وہ خط جو پہلے سمتی کے شروع کے سرے سے آخری سمتی کے آخری سرے تک کھینچا جائے سمتی حاصل جمع کہلاتا ہے۔ اس قانون سے قوتوں کی کسی تعداد کے حاصل کی مقدار اور سمت حاصل ہو سکتی ہے لیکن ضروری نہیں کہ محل حاصل ہو۔

سمتی مقداروں کی بحث میں "بو کی ترقیم" بہت کارآمد ہے وہ یہ ہے کہ سمتیوں کے درمیان کی جگہوں کو حروف یا اعداد سے تعبیر کیا جائے اور اس طرح کوئی سمتی اُن دو جگہوں کے حروف یا اعداد سے تعبیر ہوگا جن کے درمیان یہ واقع ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ (۰، ۱)' (۱، ۲)' (۲، ۳)' (۳، ۴)' (۴، ۵) (شکل ۱۵) چند قوتیں ایک مستوی میں ہیں۔ کسی موزوں پیمانے پر ایک سمتی نقشے میں ایک خط ۰، ۱ کھینچو جو قوت ۰، ۱ کو مقدار اور سمت میں تعبیر کرے۔ پھر ۱ سے ۱، ۲ کھینچو جو قوت ۱، ۲ کو مقدار اور سمت میں تعبیر کرے اور اسی طرح یہاں تک کہ آخری قوت (۴، ۵) کھینچ لی جائے۔ تب سمتی نقشے کے پہلے نقطے کو آخری نقطے سے یعنی ۰ کو ۵ سے ملانے والا خط ۰، ۵ قوتوں کے حاصل کی مقدار اور سمت کو ظاہر کریگا۔ خط ۰، ۵ کو سمتی کثیر الاضلاع کا اختتامی خط کہا جاتا ہے۔ اب اگر دی ہوئی قوتیں تعادل میں ہوں تو ظاہر ہے کہ اُن کا حاصل کچھ نہیں ہوگا۔ اس طرح متعادل قوتوں کے سمتی کثیر الاضلاع کا پہلا نقطہ اور آخری نقطہ ایک دوسرے پر منطبق ہونے چاہییں۔

چند دی ہوئی قوتوں کا جب حاصل معلوم کرنا ہو تو بالعموم حاصل کی مقدار اور سمت کے علاوہ اُس کا محل بھی مطلوب ہوتا ہے، اور سوائے اس صورت کے کہ تمام قوتیں ایک ہی نقطے میں سے گزریں جس صورت میں حاصل بھی اسی نقطے میں سے گزریگا بالعموم محل کے لیے کوئی اور عمل اختیار کرنا پڑیگا۔ یہ عمل "ریسمانی اور سمتی کثیر الاضلاع" کے نام سے مشہور ہے اور حسب ذیل ہے:—

فرض کرو کہ (۰، ۱)' (۱، ۲) وغیرہ (شکل ۱۶) چند قوتیں ہیں جو ضروری نہیں کہ متوازی یا متراکز ہوں۔ کسی موزوں پیمانے پر ایک سمتی نقشے میں ۰، ۱، ۲، وغیرہ

کھینچو۔ تب حسب سابق اختتامی خط ۰، ۵ سے حاصل کی مقدار اور سمت تعبیر ہوگی۔

ریسمانی کثیر الاضلاع

سمتی کثیر الاضلاع

شکل نمبر ۱۶۔ ریسمانی اور سمتی کثیر الاضلاع کی ساخت

اب کاغذ پر کسی مناسب مقام پر ایک نقطہ ط لو (جو قطب کہلاتا ہے) اور ط سے ۰، ۱، ۲ وغیرہ کو ملاؤ۔ اب پہلی قوت کے خطِ عمل کو قطع کرتا ہوا کوئی خط ا ف متوازی ط ۰ کے کھینچو اور فرض کرو کہ یہ پہلی قوت کے خطِ عمل کو ا پر قطع کرتا ہے۔ جگہ ا میں ا ب متوازی ط ۱ کے کھینچو، جگہ ۲ میں ب ج متوازی ط ۲ کے، اور علی ہذا یہاں تک کہ آخری کڑی، ط ۵ کے متوازی کھینچ جائے۔ (نوٹ۔ خطوط ف ا، ا ب، ب ج..... وغیرہ کڑیاں کہلاتے ہیں)۔ اب اس آخری کڑی کو خارج کرکے پہلی کڑی سے ف پر ملنے دو۔ تب حاصل ح نقطہ ف میں سے گزریگا شکل ا ب ج د ع ف کو کڑیوں کا کثیر الاضلاع یا ریسمانی کثیر الاضلاع کہا جاتا ہے۔

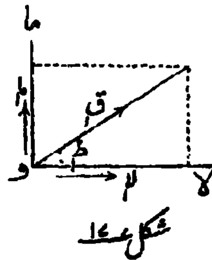
ثبوت۔ سمتی جمع کے قانون کی رو سے سمتی نقشے میں قوت ۰، ۱ قوتوں ۰، ط اور ط، ا کے معادل ہے جو خطوط ف ا اور ا ب میں عمل کریں۔ قوت ۱، ۲ قوتوں ۱، ط اور ط، ۲ کے معادل ہے جو ب ا اور ب ج میں عمل کریں اور علی ہذا۔ آخری قوت ۴، ۵ قوتوں ۴، ط اور ط، ۵ کے معادل ہے جو د ع اور ف ع میں عمل کریں۔ اب دیکھو ف ا اور ف ع میں عمل کرنے والی قوتوں کے سوا باقی سب ایک دوسری کی تعدیل کر دیتی ہیں اور اس طرح قوتوں کے پورے نظام کا حاصل وہی ہے جو ف ا اور ف ع کا ہے اور اس طرح ان سے

نقطۂ تقاطع ف میں سے عمل کریگا۔

یہ عمل کام نہیں دیگا اگر پہلی اور آخری کڑی متوازی ہوں۔ اگر یہ صورت ہو تو یا تو (ا) ط خط ۰، ۵ پر لیا گیا ہے یا (ب) سمتی کثیر الاضلاع بند ہوجاتا ہے (یعنی ۰ اور ۵ منطبق ہوتے ہیں) جس صورت میں قوتیں یا تو تعادل میں ہونگی یا ایک جفت میں تحویل ہونگی۔

آگے چل کر خماؤ کے معیار، ہوا کے دباؤ کے لیے زور نقشہ، وغیرہ، کے سلسلے میں ہم کو ریسمانی اور سمتی کثیر الاضلاع کا بار بار استعمال کرنا ہوگا۔ لیکن مناسب یہی ہے کہ طلبا اسی مقام پر تختہ نقشہ کشی پر چند مثالیں کرکے اس عمل پر خوب حاوی ہوجائیں۔

قوتوں کا حاصل علم مثلث تحلیل سے ــــ اگر کوئی قوت $ق_1$ کسی حوالے کے خط و لا سے زاویہ $ط_1$ پر عمل کرے (شکل ۱۷) تو اس قوت کے اجزائے تحلیلی و لا کی سمت میں اور اس کے علی القوائم یہ ہونگے:۔



شکل ۱۷

$$لا_1 = ق_1 \ جم \ ط_1$$
$$ما_1 = ق_1 \ جب \ ط_1$$

اب فرض کرو کہ متعدد قوتیں $ق_1$، $ق_2$ ...... $ق_ن$ ہیں جو زاویوں $ط_1$، $ط_2$ ... $ط_ن$ پر عمل کرتی ہیں۔ تب سمت و لا میں مجموعی جزو تحلیلی

$$لا = ق_1 \ جم \ ط_1 + ق_2 \ جم \ ط_2 + \ldots\ldots \ ق_ن \ جم \ ط_ن$$

اس کو آسانی کے لیے یوں لکھا جاتا ہے:۔

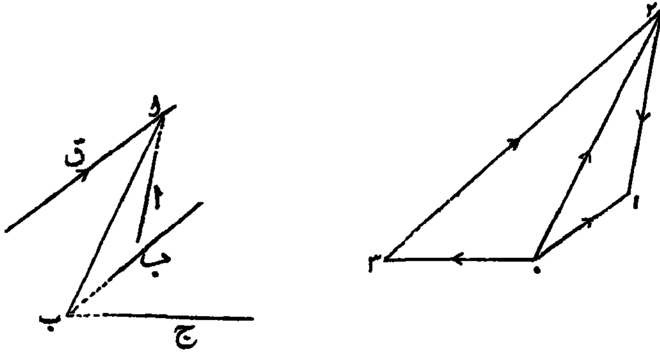
$$لا = \sum_{1}^{ن} (ق \ جم \ ط) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اسی طرح مجموعی جزوِ تحلیلی د ما کی سمت میں

$$\text{ما} = \text{ق}_1 \text{ جب طہ}_1 + \text{ق}_2 \text{ جب طہ}_2 + \ldots\ldots \text{ق}_n \text{ جب طہ}_n$$

یا

$$\text{ما} = \sum_1^n (\text{ق جب طہ}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$



شکل ۷۱۔۱۔ ایک قوت کی تحلیل تین سمتوں میں

تب اگر حاصل کی مقدار ح ہو اور د لا سے اِس کا میلان عہ ہو تو

$$\text{ح} = \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

$$\text{اور مس عہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

اگر تمام قوتیں متراکز نہ ہوں تو اِس حاصل کے محل کے لیے حسب سابق کوئی اَور عمل کرنا ہوگا۔ موجودہ صورت میں اِس کے لیے معیاروں کا اصول اختیار کیا جاتا ہے جس سے ہم آگے چل کر بحث کرینگے۔

ایک قوت کی تحلیل تین غیر متراکز سمتوں میں — ایک قوت ق کو تین سمتوں ا، ب، ج میں اِس طرح تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

تینوں میں سے ایک خط مثلاً ا کو خارج کر کے قوت کے خطِ عمل سے نقطہ ا پر ملنے دو (شکل ۱۷ ا) اور باقی دو سمتوں کو خارج کر کے باہم ب پر ملنے دو۔ ایک خط ۰، ۱ کھینچو جو قوت ق کو تعبیر کرے اور ۱، ۲ اور ۰، ۲ علی الترتیب سمت ا اور خط ا ب کے متوازی کھینچو۔ پھر ۰، ۳ کو باقی دو سمتوں میں سے کسی ایک مثلاً ج کے متوازی کھینچو اور ۲، ۳ کو باقی سمت ج ب کے متوازی۔ تب (۱، ۲) (۲، ۳) اور (۳، ۰) اِن تین سمتوں میں مطلوبہ اجزائے تحلیلی ہونگے۔

رقبوں کی پیمایش —— (ا) ریاضیاتی طریقہ — اگر ف (لا) ایک تفاعل لا کا ہو اور اِس تفاعل کی ترسیم کھینچی جائے تو ترسیم اور محور لا کے درمیان رقبہ یہ ہوگا:—

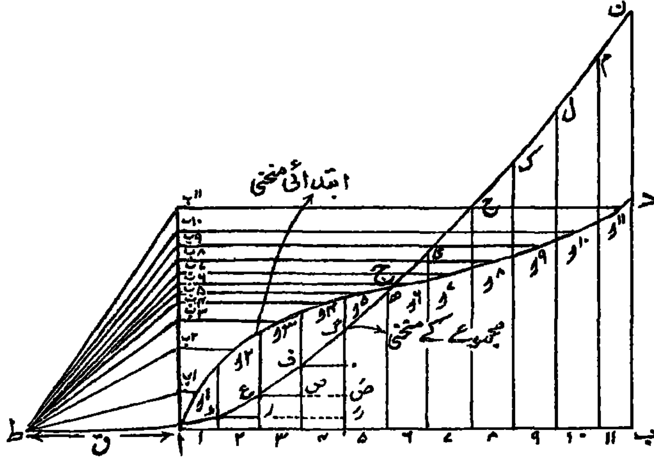
ب = ∫ف (لا) فرلا

عملاً اگر منحنی کی مساوات سادہ شکل میں نہ حاصل ہو سکے یا تکمل نہ کیا جا سکے تو یہ طریقہ ناقابلِ عمل ہوگا۔ اور چونکہ عملاً ایسا اکثر ہوگا اِس لیے سطح پیما سے یا ذیل کے طریقے سے کام لینا ہوگا:—

(ب) ترسیمی طریقہ —— اگر ایک منحنی ایک اُفقی قاعدے پر کھینچا جائے اور ایک دوسرا منحنی ایسا کھینچا جائے جس کا معین کسی نقطے پر اُس نقطے تک پہلے منحنی کے رقبے کو تعبیر کرے تو دوسرا منحنی پہلے منحنی کا **حاصل جمع منحنی** یا **تکملی منحنی** کہلاتا ہے اور پہلے منحنی کو ابتدائی منحنی کہتے ہیں۔

حاصل جمع منحنی ترسیماً اِس طرح حاصل ہو سکتا ہے: فرض کرو کہ ا ج د (شکل ۱۸) کوئی ابتدائی منحنی ایک مستقیم قاعدے ا ب پر ہے۔ ا ب کو چند حصوں میں تقسیم کرو جو ضروری نہیں کہ مساوی ہوں (لیکن عمل کی آسانی کے لیے اِن کو عموماً مساوی لیا جاتا ہے)۔ قاعدے کے اِن حصوں کو اتنا چھوٹا ہونا چاہیے کہ ان کے اوپر منحنی کا جو دَور ہے اِس کو

ایک خطِ مستقیم سمجھا جا سکے۔ تقریباً ۱ سمر یا ۴ رپانچ عموماً موزوں ہوگا اور اکثر صورتوں



شکل ع۱۸۔ مجموعے کے منحنی کی ساخت

ہیں آخر میں اِن سے چھوٹا ایک حصّہ (حصہ ۱۱) بچیگا۔ اِن حصّوں کے وسطی نقاط ۱، ۲، ۳، وغیرہ، معلوم کرو اور فرض کرو کہ ان میں کے انتصابی خط منحنی کو ۱، ۲، ۳، وغیرہ پر ملتے ہیں۔ اب اِن نقاط کا ایک انتصابی خط ۱ ع پر ظل لو جس سے نقاط ۱ ب، ۲ ب، ۳ ب، وغیرہ، حاصل ہونگے۔ اِن نقاط کو ۱ ب مخروجہ پر کے ایک قطب ط سے ملاؤ جو ۱ سے ایک مناسب فاصلہ ق پر ہو۔ اب حصہ ۱ میں ۱ د متوازی ط ۱ ب کے کھینچو، حصہ ۲ میں د ع متوازی ط ۲ ب کے، اور علیٰ ہذا، یہاں تک کہ نقطہ ن حاصل ہو۔ تب منحنی ۱ د ع ..... ن دیے ہوئے منحنی کا حاصل جمع منحنی ہوگا اور ب ن کسی پیمانے پر پورے منحنی کے رقبے کو تعبیر کریگا۔

ثبوت — کسی ایک حصّے مثلاً ۴ پر غور کرو اور ف و افقاً کھینچو۔ اب مثلث ف، گ، و مثلث ط، ۴ ب، ۱ کے مشابہ ہوگا

$$\therefore \frac{\text{گ و}}{\text{ف و}} = \frac{\text{۴ ب، ۲}}{\text{ط ۱}}$$

لیکن ط ا = ق

اور ہ ب' ا' = ہ' ہ' ہ ا

∴ گ و = ف و × ہ' ہ' ہ ا / ق = منحنی کے حصہ ہ کا رقبہ / ق

اِسی طرح ف ص = منحنی کے حصۂ ۳ کا رقبہ / ق اور علیٰ ہٰذا

∴ گ میں کا معیّن = گ و + ف ص + ...

منحنی کے پہلے چار حصّوں کا رقبہ / ق

∴ ثابت ہوا کہ ا د ع ...... ن مطلوبہ حاصل جمع منحنی ہے۔

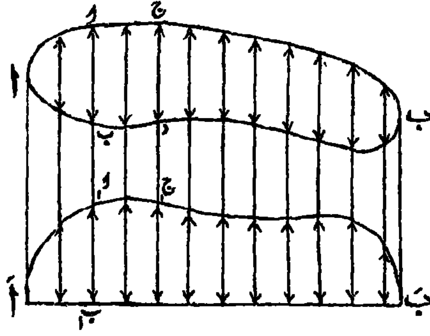
اور اگر ب ن اختیار کردہ انتصابی پیمانے پر اور ق کو افقی پیمانے پر ناپا جائے تو پورے منحنی کا رقبہ ق × ب ن کے مساوی ہوگا۔

صریحاً یہ مناسب ہے کہ ق کو ایک آسان عددِ صحیح کے مساوی لیا جائے۔ حاصل شدہ حاصل جمع منحنی پر پھر اسی طرح کا عمل کیا جائے تو ابتدائی منحنی کا "دوسرا حاصل جمع منحنی" حاصل ہوگا اور علیٰ ہٰذا۔

اگر ایک مستطیل پر عمل کیا جائے تو حاصل جمع منحنی ایک ڈھلوان خطِ مستقیم حاصل ہوگا اور اگر ایک ڈھلوان خطِ مستقیم پر عمل کیا جائے تو حاصل جمع منحنی ایک مکافی ہوگا۔ اگر ایسے منحنی پر عمل کرنا ہو جو مستقیم قاعدے پر نہ ہو تو پہلے اس کو ایک مستقیم قاعدے پر تحویل کرنا چاہیے جس کا طریقہ یہ ہے:۔

فرض کرو کہ ا ج ب د ایک بند منحنی ہے (شکل ۱۹ل)۔ ا اور ب میں سے انتصابی خطوط کھینچو جو ایک اُفقی خطِ مستقیم کو اَ اور بَ پر ملیں منحنی کو چند انتصابی خطوطِ مستقیم سے تقسیم کرو جو باہم تھوڑے تھوڑے فاصلے سے ہوں اور قاعدہ اَ بَ سے طول اِ ب' وغیرہ کھڑے کرو جو منحنی کے انتصابی حصّوں ا ب' وغیرہ، کے مساوی ہوں۔ اِس طرح حاصل شدہ نقاط اِ' ج' وغیرہ کو ملانے سے متناظر منحنی اَ ج ب مستقیم قاعدے پر حاصل ہوگا۔

(ج) سمپسن کا قاعدہ ۔۔۔ قاعدے کو ایک جفت تعداد کے



شکل ۱۹ء

مساوی حصوں میں تقسیم کرو (جن میں سے ہر ایک فرض کرو ج کے مساوی ہے) اور تمام معینوں کو ناپ لو۔

تب منحنی کا رقبہ یہ ہوگا:۔

$\frac{1}{3}$ ج { طاق معینوں کا دوگنا مجموعہ + جفت معینوں کا چارگنا مجموعہ + پہلے اور آخری معینوں کا مجموعہ }

(د) پارمانٹیر[1] کا قاعدہ ۔۔۔ قاعدے کو سمپسن کے قاعدے کی طرح تقسیم کرکے معینوں کو ناپ لو۔ تب منحنی کا رقبہ یہ ہوگا:۔

۲ ج × طاق معینوں کا مجموعہ ۔ $\frac{ج}{6}$ { (دوسرا معین ۔ پہلا معین) ۔ (آخری معین ۔ اس سے پہلے کا معین) }

معیار ۔۔۔ پہلے معیار ۔۔۔

[1] Parmontier

کسی { قوت (ق) / کمیت (ک) / رقبہ (ب) / حجم (ح) } کو ایک دیے ہوئے نقطہ یا محور سے اس کا جو فاصلہ ر ہو اِس سے ضرب دینے سے جو چیز حاصل ہو وہ اس { قوت / کمیت / رقبہ / حجم } کا پہلا معیار دیے ہوئے نقطے یا محور کے گرد ہے۔

عام طور پر اِس کو صرف معیار کہتے ہیں۔

قوت کی صورت میں معیار دیے ہوئے نقطے یا محور کے گرد گھومنے کے تقاضے کا پیمانہ ہے۔ اور اِس معیار کو علامت مثبت یا منفی اِس لحاظ سے دی جاتی ہے کہ یہ گردش کس سمت میں واقع ہونا چاہتی ہے۔ عموماً موافق سمت ساعت سمت کو مثبت اور مخالف سمتِ ساعت سمت کو منفی سمجھا جاتا ہے۔ اب اگر کوئی استوار جسم قوتوں کے کسی دیے ہوئے نظام کے تحت تعادل میں ہو تو اس میں کسی نقطے یا محور کے گرد گھومنے کا اقتضا نہیں ہوگا۔ اِس طرح یہ بنیادی قاعدہ حاصل ہوتا ہے:۔

کوئی جسم تعادل میں ہو تو اس پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے معیاروں کا جبری مجموعہ کسی نقطے یا محور کے گرد صفر ہوگا۔

ذیل کی عددی مثالوں سے اِس مسئلہ کے دو اطلاق نظریۂ تغیر پر واضح ہونگے۔ کتاب میں اور کئی مثالیں آئینگی اور جو اِس مضمون سے ناواقف ہوں وہ اُن سوالات کو حل کریں جو کتاب کے آخر میں دیے گئے ہیں۔

مثال ۱۔ ۲۰ فٹ فصل کے ایک آزادانہ سہارے ہوئے

شہتیر پر ½ ٹن، ¼ ٹن، ۱ ٹن اور ۲ ٹن کے بوجھ شکل ۲۰ میں دکھائے ہوئے فاصلوں پر عمل کرتے ہیں۔ سروں کے ردِّ عمل $ر_و$ اور $ر_ب$ معلوم کرو۔

شہتیر بوجھوں اور ردِّ عملوں کے تحت تعادل میں ہے۔ اس لیے قوتوں کا سمتی مجموعہ صفر ہوگا۔ متوازی قوتوں کی صورت میں سمتی مجموعہ جبری مجموعے کے مساوی ہوتا ہے۔

$$\therefore\ ر_و + ر_ب = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + ۱ + ۲ = ۳٫۷۵ \text{ ٹن}$$

$ر_و$ معلوم کرنے کے لیے ب کے گرد معیار لو جس سے $ر_ب$ کا معیار ساقط ہو جائیگا۔ اور

$و_۱$ کا معیار $= ۱۷ \times \frac{۱}{۲} = ۸٫۵۰$ فٹ ٹن

$و_۲$ " $= ۱۳ \times \frac{۱}{۴} = ۳٫۲۵$ "

$و_۳$ " $= ۷ \times ۱ = ۷٫۰۰$ "

$و_۴$ " $= ۴ \times ۲ = ۸٫۰۰$ "

∴ وزنوں کا مجموعی معیار $= ۲۶٫۷۵$ "

یہ مخالف سمتِ ساعت معیار ہے اور موافق سمتِ ساعت معیار $ر_و \times ۲۰$ کے مساوی ہونا چاہیے۔

$$\therefore\ ۲۰\, ر_و = ۲۶٫۷۵$$

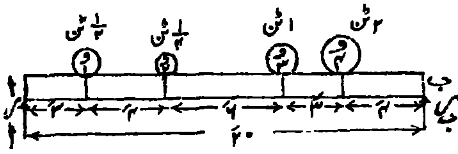
$$\therefore\ ر_و = \frac{۲۶٫۷۵}{۲۰} = ۱٫۳۳۷ \text{ ٹن}$$

یا کہو ۱٫۳۴ ٹن

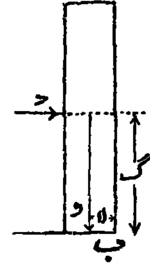
$$\therefore\ ر_ب = ۳٫۷۵ - ۱٫۳۴$$

$$= ۲٫۴۱ \text{ ٹن}$$

حساب کی صحت کی جانچ اس طرح ہو سکتی ہے کہ ا کے گرد معیار لے کر سلب معلوم کیا جائے۔



شکل ۲۰



شکل ۲۱

مثال ۲۔ ایک دیوار کا وزن جو ۱۸ انچ موٹی اور ۸ فٹ اونچی ہے، ۱۰ ٹن ہے۔ معلوم کرو کہ دیوار کو الٹ دینے کے لیے دیوار کے مرکز پر ہوا کا کتنا دباؤ ضروری ہے (شکل ۲۱)۔

نقطہ ب کے گرد معیار لینے سے (شکل ۲۱) ہوا کی وجہ سے معیار جو موافق سمتِ ساعت ہے د × گ ہوگا اور دیوار کے وزن کی وجہ سے معیار جو مخالف سمتِ ساعت ہے و × لا ہوگا۔ دیوار جب عین الٹنے کو ہو تو یہ مساوی ہونگے۔

∴ د × گ = و × لا

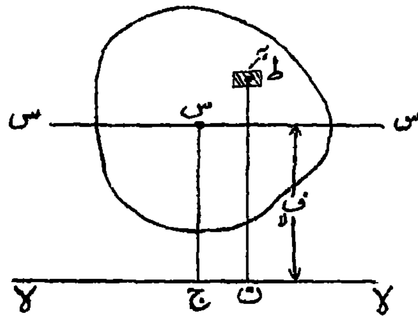
$$\frac{9 \times 10}{12} = د\ 4$$

$$د = \frac{9 \times 10}{12 \times 4} = 1.875 \text{ ٹن}$$

کسی نقطے کے گرد چند دی ہوئی قوتوں کے پہلے معیار کی ترسیمی دریافت ـــــ یہ ریسمانی اور سمتی کثیرالاضلاع والے عمل کے ذریعے حاصل کیا جاتا ہے (دیکھو شکل ۱۶)۔

فرض کرو کہ قوتوں کے دیے ہوئے نظام کا معیار نقطہ ص کے گرد

مطلوب ہے۔ ص میں سے ایک خط حاصل رح کے متوازی کھینچو جو پہلی اور آخری محروجہ کڑیوں کو ھ اور گ پر قطع کرے۔ تب اگر سمتی نقشے میں نقطہ ط خط ۰، ۵ سے عمودی یا قطبی فاصلہ ق پر ہو تو ص کے گرد قوتوں کے نظام کا معیار گ ھ × ق ہوگا جس میں گ ھ کو مکانی پیمانے پر اور ق کو قوتوں کے پیمانے پر پڑھنا ہوگا۔



شکل ۲۲ — رقبے کا پہلا معیار

ثبوت:۔ مثلثات ف گ ھ اور ط، ۰، ۵ مشابہ ہیں۔

∴ گ ھ / ص = ۰، ۵ / ق

∴ ق × گ ھ = ۰، ۵ × ص

لیکن ۰، ۵ = حاصل رح

اور ص = ح کا فاصلہ ص سے

∴ ۰، ۵ × ص = قوتوں کے نظام کا معیار ص کے گرد۔

∴ ق × گ ھ = قوتوں کے نظام کا معیار ص کے گرد۔

کسی رقبے کا پہلا معیار — فرض کرو کہ کسی شکل کے اندر

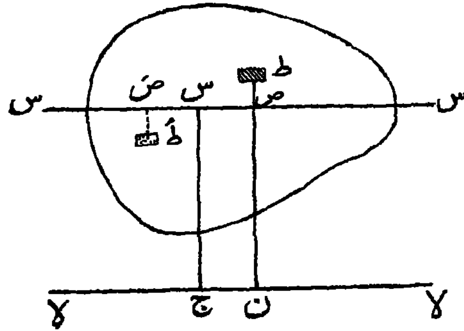
ایک چھوٹا سا رقبہ بہ نقطۂ ط پر واقع ہے (شکل ۲۲) اور فرض کرو کہ لا لا کوئی خطِ مستقیم یا محور ہے۔ تب اگر ط ن علی القوایم کھینچا گیا ہو لا لا کے، تو بہ × ط ن اس چھوٹے رقبہ کا پہلا معیار دیے ہوئے خط کے گرد ہو گا۔ اب اگر پوری شکل، بہ جیسے چھوٹے چھوٹے رقبوں میں تقسیم کی جائے اور ہر ایک ٹکڑے کا معیار لا لا کے گرد لیا جائے اور ان سب معیاروں کو جمع کیا جائے تو یہ حاصل مجموعہ رقبے کا پہلا معیار ہو گا۔

∴ پورے رقبے کا پہلا معیار بہ × ط ن جیسی مقداروں کا حاصل جمع ہے۔

اس کو جبری طور پر یوں لکھتے ہیں:—

پورے رقبے کا پہلا معیار = ⅀ (بہ × ط ن)۔

کسی رقبے کا **مرکزِ ہندسی** یا پہلے معیار کا مرکز وہ نقطہ ہے جس پر پورے رقبے کو مرتکز سمجھنے سے کسی خط کے گرد اس رقبے کا وہی معیار حاصل ہو جو اصلی رقبے کا پہلا معیار اس خط کے گرد ہے۔



شکل ۲۳

اِس طرح اگر رقبے کا مرکزِ ہندسی س ہو اور س ج خط لا لا پر عمود کھینچا جائے اور پوری شکل کا رقبہ ج ہو تو

ب × س ج = Σ (بہ × طن)

∴ س ج = Σ (بہ × طن) / ب

اِس سے س کا ٹھیک محل معیّن نہیں ہوگا بلکہ صرف خط لا لا سے اس کا فاصلہ۔ اگر مرکزِ ہندسی کا ٹھیک محل مطلوب ہو تو ایک اور خط کے گرد معیار لینا چاہیے جو لا لا کے متوازی نہ ہو۔ تب اِن دونوں خطوط سے جو فاصلے حاصل ہوں اُن سے مرکزِ ہندسی کا محل معیّن ہو جائیگا۔

مرکزِ ہندسی کے متعلق یہ بات معلوم ہو کہ مرکزِ ہندسی کا محل صرف رقبے کی شکل پر منحصر ہے اُن محوروں کے محل پر منحصر نہیں جن کے گرد معیار لیے گئے۔

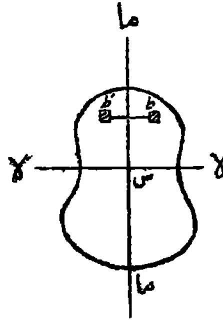
قوتوں کی طرح رقبوں کے معیار بھی مثبت اور منفی ہوتے ہیں۔ معیار مثبت اُس وقت ہوتا ہے جب کہ رقبے کا زیرِ غور ٹکڑا محور کے اوپر یا دائیں طرف ہو اور منفی جبکہ نیچے یا بائیں طرف ہو۔

مرکزِ ہندسی میں کے کسی خط کے گرد پہلا معیار۔ —— مرکزِ ہندسی میں کے ایک خط س س کے گرد رقبے کے پہلے معیار پر غور کرو (شکل ۲۳)۔ خط کے اوپر کے حصّوں مثلاً ط پر کے حصّے کا معیار مثبت ہوگا اور نیچے کے حصّوں مثلاً طَ پر کے حصّے کا معیار منفی ہوگا۔

اِس صورت میں س ج صفر ہے اِس لیے ب × س ج بھی صفر ہے۔ اِس طرح یہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے کہ کسی رقبے کا پہلا معیار اس کے مرکزِ ہندسی میں کے کسی خط کے گرد صفر ہوتا ہے۔

محاورِ تشاکل کے لحاظ سے مرکزِ ہندسی کا محل —— فرض کرو کہ ایک رقبے کا ایک محورِ تشاکل ما ما ہے (شکل ۲۴)۔ تب یہ خط رقبے کو دو بالکل مشابہ نصفوں میں تقسیم کرتا ہوگا۔ اِس طرح رقبے کے ہر حصے (مثلاً ط) کے جواب میں جس کا معیار ما ما کے گرد مثبت ہے ایک مساوی رقبہ (طَ)

موجود ہوگا جس کا معیار ما ما کے گرد ط پر کے حصے کے معیار کے مساوی اور



شکل ۲۴

منفی ہوگا۔ اِس طرح پورے رقبے کا معیار ما ما کے گرد صفر ہوگا، یعنی ما ما مرکزِ ہندسی میں سے گزرتا ہوگا۔

اگر شکل کا کوئی اور محورِ تشاکل لا لا ہو تو مرکزِ ہندسی اس پر بھی واقع ہوگا۔ اِس طرح یہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے کہ کسی شکل کا مرکزِ ہندسی اِس کے دو محاورِ تشاکل کے تقاطع پر ہوتا ہے۔

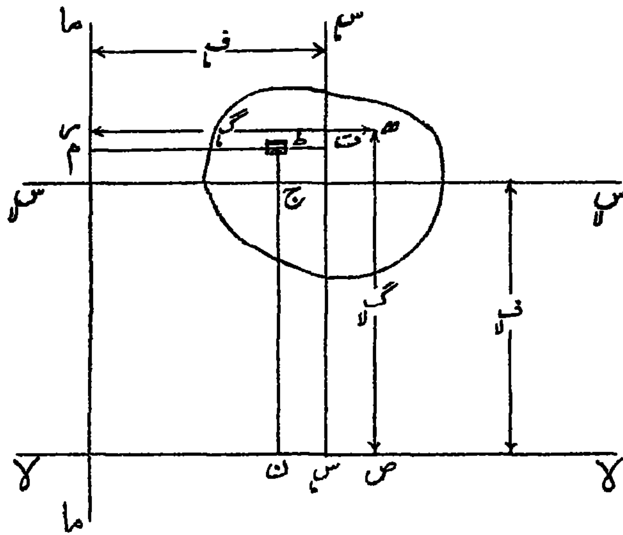
مختلف صورتوں میں مرکزِ ہندسی کے محل کے لیے دیکھو صفحہ ۱۰۶، ۱۰۷۔

یہ معلوم ہونا چاہیے کہ کسی رقبے کا مرکزِ ہندسی وہی ہوگا جو اس رقبے کی شکل کے ایک شکلے کا مرکزِ جاذبہ ہوگا۔

دوسرے معیار یا معیارِ جمود۔ کسی { قوت ق، کمیت ک، رقبہ ب، حجم ح }

اور ایک دیے ہوئے نقطے یا محور سے اس کے فاصلے ر کے مربع کے

حاصلِ ضرب کو اس محور کے گرد اس { قوت / کمیت / رقبہ / حجم } کا دوسرا معیار کہا جاتا ہے۔



شکل ۲۵۔ رقبہ کا دوسرا معیار یا معیارِ جمود

گردش کرنے والے اجسام کی بحث میں کمیت کے دوسرے معیار سے سابقہ پڑتا ہے اور اس چیز کو معیارِ جمود کا نام دیا گیا ہے۔ تعمیروں کے کام میں دوسرے معیار کے استعمال کے وقت جمود سے کوئی تعلق نہ ہوگا۔ لیکن یہاں بھی معیارِ جمود کا لفظ عام طور پر اختیار کر لیا گیا ہے اس لیے اس کو ہم بھی استعمال کرینگے لیکن یہ یاد رکھنا چاہیے کہ یہ بالکل ایک استعارہ ہے۔

رقبوں کے لیے اس کا استعمال — اگر کسی نقطہ ط پر ایک

چھوٹا رقبہ ب ہو (شکل ۲۵) اور کسی خط لالا پر ط ن عمود کھینچا جائے تو خط لالا کے گرد اِس رقبے کا دوسرا معیار ب × ط ن² ہوگا۔ اب اگر جیسا کہ پہلے معیار کی صورت میں کیا گیا، پورے رقبے کو چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے اور ہر ایک کا دوسرا معیار لیا جائے تو لالا کے گرد پورے رقبے کا دوسرا معیار اُن حصوں کے دوسرے معیاروں کا حاصل جمع ہوگا۔ دوسرے معیار کو حرف آ سے تعبیر کیا جاتا ہے اور جس خط کے گرد یہ لیا گیا ہے اس کو بطور لاحقہ کے لگا دیتے ہیں مثلاً $\text{آ}_{\text{لالا}}$

اِس طرح $\text{آ}_{\text{لالا}} = \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ط ن}^2)$

اِسی طرح خط ما ما لیں تو

$\text{آ}_{\text{ماما}} = \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ط م}^2)$

اب فرض کرو کہ ھ ایک ایسا نقطہ ہے جس پر پورے رقبے کو مرتکز سمجھنے سے لالا اور ما ما کے گرد وہی دوسرے معیار حاصل ہوں جو اِن خطوط کے گرد اصلی رقبے کے ہیں۔

تب $\text{ب} \times \text{ھ ص}^2 = \text{آ}_{\text{لالا}}$

اور $\text{ب} \times \text{ھ س}^2 = \text{آ}_{\text{ماما}}$

تب نقطہ ھ کو محاور لالا اور ما ما کے لحاظ سے رقبے کا ثانویہ (Secondroid) (مرکزِ ہندسی کی مماثلت سے) کہہ سکتے ہیں۔ ثانویہ کے متعلق قابلِ لحاظ بات یہ ہے کہ اس کا محل اُن محاور کے محل پر منحصر ہے جن کے گرد معیار لیے گئے ہیں، مرکزِ ہندسی میں ایسا نہیں۔

محاور لالا اور ما ما سے ثانویہ کے فاصلوں کو اِن محاور کے گرد دوسرے معیار کے نصف قطر یا گردشی نصف قطر کہا جاتا ہے اور $\text{گ}_{\text{لا}}$ اور $\text{گ}_{\text{ما}}$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

اس طرح $\text{ب}\,\text{گ}^2_{\text{لا}} = \text{آ}_{\text{لالا}} = \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ط ن}^2)$

یا $\text{گ}_{\text{لا}} = \sqrt{\dfrac{\text{آ}_{\text{لالا}}}{\text{ب}}}$

اور $\text{ب}\,\text{گ}^2_{\text{ما}} = \text{آ}_{\text{ماما}} = \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ط م}^2)$

یا $\text{گ}_{\text{ما}} = \sqrt{\dfrac{\text{آ}_{\text{ماما}}}{\text{ب}}}$

عملاً دوسرا معیار ہمیشہ مرکزِ ہندسی میں کے کسی خط کے گرد مطلوب ہوتا ہے۔ اور وہ اِس طرح حاصل کیا جاتا ہے:—

کسی رقبے کا دوسرا معیار ایک دیے ہوئے خط کے گرد معلوم ہے تو مرکزِ ہندسی میں کے متوازی خط کے گرد معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ $\text{آ}_{\text{لالا}}$ معلوم ہے۔

تو $\text{آ}_{\text{لالا}} = \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ط ن}^2)$

$= \Sigma\,\{\text{ب} \times (\text{ط ج} + \text{ج ن})^2\}$

$= \Sigma\,\{\text{ب} \times (\text{ط ج} + \text{ف}_{\text{لا}})^2\}$

$= \Sigma\,\{\text{ب} \times (\text{ط ج}^2 + 2\,\text{ط ج} \times \text{ف}_{\text{لا}} + \text{ف}^2_{\text{لا}})\}$

$= \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ط ج}^2) + \Sigma\,(\text{ب} \times 2\,\text{ط ج} \times \text{ف}_{\text{لا}}) + \Sigma\,(\text{ب} \times \text{ف}^2_{\text{لا}})$

بائیں جانب کی رقموں میں

Σ (بہ × طج²) = آ_س لا (جو مطلوب ہے)

اور Σ (بہ × ۲ طج × ف_لا) = ۲ ف_لا Σ (بہ × طج)

= ۲ ف_لا × (رقبے کا پہلا معیار خط س_لا س کے گرد جو مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے)

= ۲ ف_لا × صفر

= صفر

Σ (بہ × ف_لا²) = ف_لا² Σ بہ

= ف_لا² × (پوری شکل کا رقبہ)

= ف_لا² × ب

∴ آ_لالا = آ_س لا + ب × ف_لا²

یا آ_س لا = آ_لالا − ب × ف_لا²

اسی طرح آ_س ما = آ_ماما − ب × ف_ما²

معیار کا یا جمود کا ناقص —— کسی تراش کے صدر محاور مرکز ہندسی میں سے وہ دو علی القوائم محاور ہیں جن کے حوالے سے بہ × طم × طن جیسی مقداروں کا حاصل جمع (جسے حاصل ضرب معیار یا جمود کا حاصل ضرب کہتے ہیں) صفر ہو۔

جن تراشوں میں کوئی محور تشاکل ہو وہ صدر محوروں میں سے ایک ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ لالا اور ماما (شکل ۲۶) ایک تراش کے صدر محاور ہیں اور فرض کرو کہ ان محوروں کے گرد گردشی نصف قطر گ_لا اور گ_ما ہیں۔ و کو مرکز

مان کر ایک ناقص کھینچو جس میں و لا مساوی گ$_{ما}$ کے اور و ما مساوی گ$_{لا}$ کے ہو۔ تو یہ ناقص معیار کا ناقص یا جمود کا ناقص کہلاتا ہے۔

و میں سے گزرنے والے کسی خط ے ے کے گرد جو لا لا سے زاویہ طہ بناتا ہو گردشی نصف قطر حاصل کرنے کے لیے ے ے کے متوازی ناقص کا مماس ی ی کھینچو اور اس پر عمود و ص کھینچو۔

تب وص = گ$_{ی}$

کیونکہ آ$_{ےے}$ = ∑ بہ ط ر^{۲}

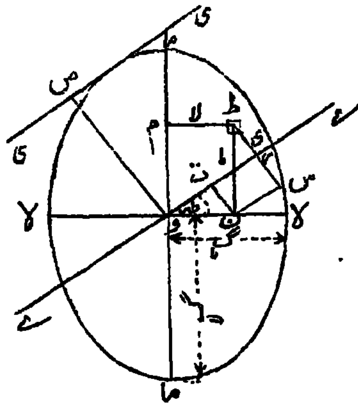
= ∑ بہ (ط س ـ س ر)^{۲}

= ∑ بہ (ط س ـ ن ت)^{۲}

= ∑ بہ (ما جم طہ ـ لا جب طہ)^{۲}

= ∑ بہ لا^{۲} جب^{۲} طہ + ∑ بہ ما^{۲} جم^{۲} طہ ـ ∑ ۲ بہ لا ما جب طہ جم طہ

= جب^{۲} طہ ∑ بہ لا^{۲} + جم^{۲} طہ ∑ بہ ما^{۲} ـ ۲ جب طہ جم طہ ∑ بہ لا ما



شکل ۲۶۔ معیار کا یا جمود کا ناقص

اِس میں $\sum \text{بہ لا ما}$ حاصل ضربی معیار ہے اور چونکہ لا لا اور ما ما صدر محاور ہیں اِس لیے یہ صفر ہوگا۔

$$\therefore \quad \text{آ}_{\text{ےے}} = \text{جب}^{2}\,\text{طہ} \sum (\text{بہ لا}^{2}) + \text{جم}^{2}\,\text{طہ} \sum (\text{بہ ما}^{2})$$

$$= \text{آ}_{\text{ماما}}\,\text{جب}^{2}\,\text{طہ} + \text{آ}_{\text{لالا}}\,\text{جم}^{2}\,\text{طہ}$$

$$\therefore \quad \text{ب گ}_{\text{ی}}^{2} = \text{ب گ}_{\text{ما}}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{طہ} + \text{ب گ}_{\text{لا}}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{طہ}$$

$$\text{یا} \quad \text{گ}_{\text{ی}}^{2} = \text{گ}_{\text{ما}}^{2}\,\text{جب}^{2}\,\text{طہ} + \text{گ}_{\text{لا}}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{طہ}$$

اس لیے ناقص کے خواص کی رُو سے $\text{و ص} = \text{گ}_{\text{ی}}$

جن صورتوں میں کوئی محورِ تشاکل نہ ہو اِن میں صدر محاور معلوم کرنے کا عمل یہ ہے :۔

(ا) پہلے ترسیمی طریقہ سے یا حساب سے مرکزِ ہندسی میں سے گزرنے والے دو علی القوائم محاور کے گرد حاصل ضربی معیار اور گردشی نصف قطر معلوم کرو۔

فرض کرو کہ حاصل ضربی معیار ب ح^{2} ہے اور گردشی نصف قطر $\text{گ}_{\text{لا}}$ اور $\text{گ}_{\text{ما}}$ ہیں۔

تب $\text{گ}_{\text{لا}}$ یا $\text{گ}_{\text{ما}}$ سے صدر محاور کا زاویۂ میلان طہ ذیل کے ربط سے حاصل ہوگا:

$$\text{مس}\ 2\ \text{طہ} = \frac{2\,\text{ح}^{2}}{\text{گ}_{\text{لا}}^{2} - \text{گ}_{\text{ما}}^{2}}$$

(ب) ترسیمی طریقے سے یا حساب سے دی ہوئی شکل کے دوسرے معیار لا لا اور ما ما کے گرد معلوم کرو جو باہم علی القوائم ہوں اور مرکزِ ہندسی میں سے گزرتے ہوں ۔ اور نیز ایک اَور خط ے ے کے گرد معلوم کرو جو اِن دونوں سے ۴۵° پر ہو۔

تب اگر لا لا اور ما ما سے صدر محاور کا زاویۂ میلان طہ ہو تو

$$\text{مس } ۲ \text{ طہ} = \frac{\text{آ}_{\text{لا}} + \text{آ}_{\text{ا}} - ۲\,\text{آ}_{\text{ی}}}{\text{آ}_{\text{لا}} - \text{آ}_{\text{ا}}}$$

یا

$$\text{مس } ۲ \text{ طہ} = \frac{\text{گ}^{۲}_{\text{لا}} + \text{گ}^{۲}_{\text{ا}} - ۲\,\text{گ}^{۲}_{\text{ی}}}{\text{گ}^{۲}_{\text{لا}} - \text{گ}^{۲}_{\text{ا}}}$$

[ایک قاعدہ جو بعض اوقات جمود کے معیاروں کے حسابات میں کار آمد ہوتا ہے یہ ہے: کسی دیے ہوئے نقطے میں سے گزرنے والے کوئی دو علی القوائم خطوط لیے جائیں اُن کے گرد کے جمود کے معیاروں کا حاصل جمع وہی ہوتا ہے۔]

شرط کہ حاصل ضربی معیار صفر ہو

— یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ دو خطوط کے گرد حاصل ضربی معیار کے صفر ہونے کی شرط یہ ہے کہ یہ خطوط معیار کے ناقص کے مزدوج قطر ہوں۔

معیار کے ناقص پر ایک عددی مثال صفحہ ۲۱۶ پر دی گئی ہے۔

مرکزِ ہندسی میں کے کسی دو علی القوائم خطوط کے گرد دوسرے معیار

— اوپر قوسین میں جو قاعدہ بتایا گیا ہے اس کی رُو سے مرکزِ ہندسی میں سے گذرنے والے دو علی القوائم خطوط کے گرد معیارِ جمودوں کا مجموعہ مستقل ہوگا۔

کسی شکل کا دوسرا معیار یا معیارِ جمود ایک اس کے مستوی کے علی القوائم محور کے گرد

— کسی رقبے کا دوسرا معیار یا معیارِ جمود اس کے مستوی کے علی القوائم ایک محور و کے گرد قطبی دوسرا معیار یا قطبی معیارِ جمود کہلاتا ہے اور $\sum$ (ب × ط د^{۲}) کے مساوی ہوتا ہے۔

و میں سے کوئی دو علی القوائم محور شکل کے مستوی میں لا لاَ اور ما ما کھینچو (شکل ۲۷)۔ تب

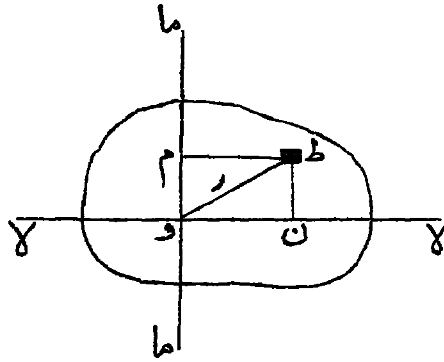
$$\text{طو}^2 = \text{طن}^2 + \text{نو}^2$$

$$= \text{طن}^2 + \text{طم}^2$$

$$\therefore \text{ج}\,(\text{ب} \times \text{طو}^2) = \text{ج ب} \times \text{طن}^2 + \text{ج ب} \times \text{طم}^2$$

$$= \text{آ}_{\text{لالا}} + \text{آ}_{\text{ماما}}$$

اِس سے ذیل کا قاعدہ حاصل ہوتا ہے :-



شکل ۲۷۔ جمود کا قطبی معیار

رقبے کے کسی علی القوائم محور کے گرد دوسرا معیار یا معیارِ جمود اُن دو علی القوائم محوروں کے گرد کے جمود کے معیاروں کے حاصل جمع کے مساوی ہوتا ہے جو اِس محور میں سے رقبے کے مستوی میں کھینچے جائیں۔

مرکزِ ہندسی، معیارِ جمود، اور گردشی نصف قطر حاصل کرنا۔

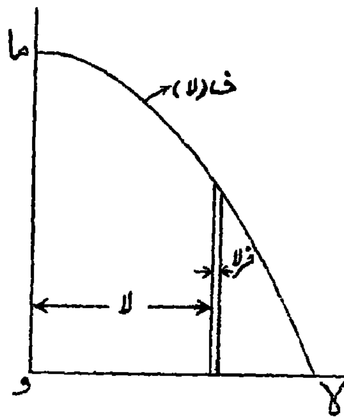
(۱) ریاضی سے ــــ تفاعل ما = ف (لا) کے منحنی پر غور کرو۔ تب محور لا کے متوازی فرلا عرض کی ایک پٹی پر غور کیا جائے (شکل ۲۸) تو

منحنی کا رقبہ $= \int$ ف (لا) فرلا

رقبے کا پہلا میعار و ما کے گرد = $\int$ ف (لا) فرلا × لا

رقبے کا دوسرا میعار و ما کے گرد = $\int$ ف (لا) فرلا × لا^2

مثلاً مکافی ما^2 = ۴ ا لا پر غور کرو اور منحنی اور محور لا کے درمیان کا رقبہ لو۔ (شکل ع ۲۹)۔



شکل ع ۲۸

منحنی کا رقبہ = $\int$ ما فرلا = $\int$ ۲ ا$^{\frac{1}{2}}$ لا$^{\frac{1}{2}}$ فرلا

$$= ۲ ا^{\frac{1}{2}} \int_{0}^{ض} لا^{\frac{1}{2}} فرلا = \left[۲ ا^{\frac{1}{2}} \times \frac{۲}{۳} لا^{\frac{۳}{۲}} \right]_{0}^{ض}$$

$$= \frac{۴}{۳} ا^{\frac{1}{2}} ض^{\frac{۳}{۲}}$$

لیکن ۲ ا$^{\frac{1}{2}}$ ض$^{\frac{1}{2}}$ = ع

∴ منحنی کا رقبہ = $\frac{۲}{۳}$ ض ع

وما کے گرد پہلا معیار $= \int \text{لا ما فرلا} = \int ۲\, \text{ا}^{\frac{۱}{۲}}\, \text{لا}^{\frac{۳}{۲}}\, \text{فرلا}$

$$= ۲\, \text{ا}^{\frac{۱}{۲}} \int_{۰}^{\text{ض}} \text{لا}^{\frac{۳}{۲}}\, \text{فرلا} = \left[۲\, \text{ا}^{\frac{۱}{۲}} \times \frac{۲}{۵}\, \text{لا}^{\frac{۵}{۲}} \right]_{۰}^{\text{ض}}$$

$$= \frac{۴}{۵}\, \text{ا}^{\frac{۱}{۲}}\, \text{ض}^{\frac{۵}{۲}} = \frac{۲}{۵}\, \text{ض}^{۲}\, \text{ع}$$

∴ مرکزِ ہندسی کا فاصلہ وما سے $= \dfrac{\frac{۲}{۵}\, \text{ض}^{۲}\, \text{ع}}{\frac{۲}{۳}\, \text{ض}\, \text{ع}} = \frac{۳}{۵}\, \text{ض}$

وما کے گرد دوسرا معیار $= \int \text{لا}^{۲}\, \text{ما فرلا} = \int ۲\, \text{ا}^{\frac{۱}{۲}}\, \text{لا}^{\frac{۵}{۲}}\, \text{فرلا}$

$$= ۲\, \text{ا}^{\frac{۱}{۲}} \int_{۰}^{\text{ض}} \text{لا}^{\frac{۵}{۲}}\, \text{فرلا} = \left[۲\, \text{ا}^{\frac{۱}{۲}} \times \frac{۲}{۷}\, \text{لا}^{\frac{۷}{۲}} \right]_{۰}^{\text{ض}}$$

$$= \frac{۴}{۷}\, \text{ا}^{\frac{۱}{۲}}\, \text{ض}^{\frac{۷}{۲}} = \frac{۲}{۷}\, \text{ض}^{۳}\, \text{ع}$$

$$\therefore \quad \text{گ}_{\text{ما}}^{۲} = \frac{\frac{۲}{۷}\, \text{ض}^{۳}\, \text{ع}}{\frac{۲}{۳}\, \text{ض}\, \text{ع}} = \frac{۳}{۷}\, \text{ض}^{۲}$$

$$\therefore \quad \text{گ}_{\text{ما}} = \sqrt{\frac{۳}{۷}}\, \text{ض}$$

شکل ع۲۹

اگر قاعدہ سے لا کے گرد دوسرا معیار مطلوب ہو تو یہ عمل کیا جائیگا :-

$$\text{آ}_{\text{وما}} = \frac{2}{7}\,\text{ض}^{3}\,\text{ع}$$

$$\text{آ}_{\text{سس}} = \text{آ}_{\text{وما}} - \text{ب} \times \text{ف}^{2}$$

$$= \frac{2}{7}\,\text{ض}^{3}\,\text{ع} - \frac{2}{3}\,\text{ض ع} \times \frac{9\,\text{ض}^{2}}{25}$$

$$= \frac{8}{175}\,\text{ض}^{3}\,\text{ع}$$

$$\text{آ}_{\text{لاے}} = \text{آ}_{\text{سس}} + \text{ب} \times \text{ف}_{1}^{2}$$

$$= \frac{8}{175}\,\text{ض}^{3}\,\text{ع} + \frac{8}{75}\,\text{ض}^{3}\,\text{ع}$$

$$= \frac{16}{105}\,\text{ض}^{3}\,\text{ع}$$

عام طور پر استعمال میں آنے والی اشکال کے دوسرے معیاروں کی فہرست صفحہ ۱۰۶/۱۰۷ پر دی گئی ہے۔

عملاً یہ اکثر ہوتا ہے کہ ریاضی کا طریقہ ناقابلِ عمل ہوتا ہے۔ اِسی صورت میں ذیل کے ترسیمی طریقے ضروری ہیں :-

(ب) **ترسیمی** —— (ا) مرکزِ ہندسی —— فرض کرو کہ کوئی رقبہ ط ص س (شکل ۳۰) ہے اور کوئی دو متوازی خط لا لا اور ما ما باہمی فاصلہ ھ پر ہیں۔

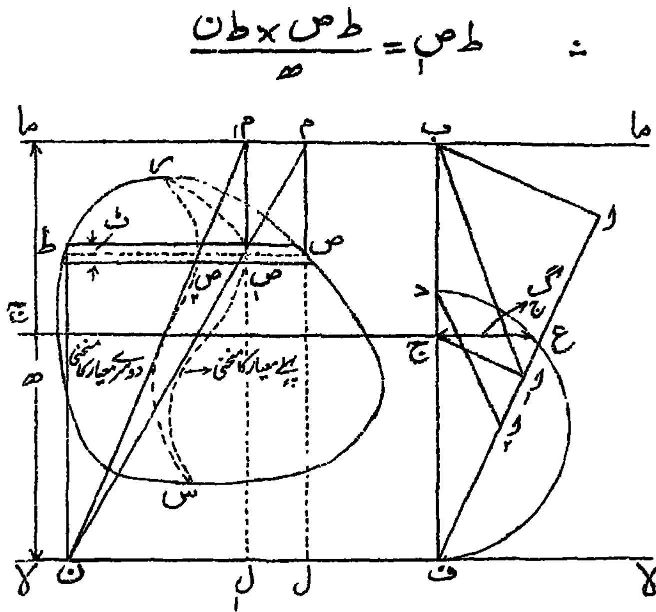
لا لا کے متوازی شکل میں ایک پتلی پٹی موٹائی ٹ کی لو اور فرض کرو کہ اِس کا مرکزی خط ط ص ہے۔ اِس مرکزی خط کے ایک سرے مثلاً ص سے ما ما پر عمود ص م ڈالو اور دوسرے سرے سے لا لا پر عمود ط ن ڈالو۔

م ن کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ط ص کو ص۱ پر قطع کرتا ہے اور م ص کو خارج کرکے لا لا سے ل پر ملنے دو۔

تب مثلثات ط ن ص۱ اور م ن ل مشابہ ہونگے۔

$$\therefore \quad \frac{\text{ط ص}_{1}}{\text{ط ن}} = \frac{\text{ن ل}}{\text{م ل}} = \frac{\text{ط ص}}{\text{ھ}}$$

∴ $$\text{ط ص}_1 = \frac{\text{ط ص} \times \text{ط ن}}{\text{ھ}}$$



شکل ۳۰ - مرکز ہندسی اور معیار جمود، وغیرہ کی ترسیمی دریافت

طرفین کو ٹ سے ضرب دینے سے

$$\text{ط ص}_1 \times \text{ٹ} = \frac{\text{ط ص} \times \text{ٹ} \times \text{ط ن}}{\text{ھ}} = \frac{\text{پٹی ط ص کا رقبہ} \times \text{ط ن}}{\text{ھ}}$$

∴ $$\text{پٹی ط ص}_1 \text{ کا رقبہ} = \frac{\text{پٹی ط ص کا پہلا معیار لا لا کے گرد}}{\text{ھ}}$$ .... (۱)

اب اگر سارے رقبے کو پٹیوں میں تقسیم کر کے ص₁ جیسے نقاط حاصل کیے جائیں اور ان نقاط کو ملایا جائے تو پہلے معیار کا منحنی ر ص₁ س حاصل ہوگا۔

تب پہلے معیار کے منحنی کے بائیں جانب کا رقبہ ط ص₁ جیسی پٹیوں کے رقبوں کا حاصل جمع ہوگا اس کو پہلے معیار کا رقبہ (ب₁) کہو۔ تب

$$\text{ب}_1 = \frac{\text{پٹیوں کے پہلے معیاروں کا حاصل جمع لا لا کے گرد}}{\text{ھ}}$$

$= \frac{\text{پورے رقبے کا پہلا معیار}}{ھ}$

∴ پورے رقبے کا پہلا معیار = ب۱ × ھ

اور مرکز ہندسی کا فاصلہ لا لا سے $= \frac{\text{لا لا کے گرد پہلا معیار}}{\text{شکل کا رقبہ}}$

$= \frac{ب_1 ھ}{ب}$ ..... (۲)

کوئی انتصابی خط ف ب کھینچو جو لا لا کو ف پر اور ما ما کو ب پر قطع کرے اور ف میں سے کوئی مائل خط کھینچو اور اس پر طول ف ا، لو جو کسی پیمانے پر ب کو تعبیر کرے اور ف ا، جو ب۱ کو تعبیر کرے۔ ا ب کو ملاؤ اور ا، ج اس کے متوازی کھینچو۔ تب ج میں سے لا لا یا ما ما کے متوازی خط کھینچنے سے اس پر مرکز ہندسی واقع ہوگا۔

کیونکہ $\frac{ج ف}{ف ب} = \frac{ف ا_1}{ف ا}$

$\frac{ج ف}{ھ} = \frac{ب_1}{ب}$ ∴

یا $ج ف = \frac{ب_1 ھ}{ب}$

اور ربط (۱) کی رو سے یہ لا لا سے مرکز ہندسی کا فاصلہ ہے۔

(۲) دوسرا معیار ــــ اگر لا لا کے گرد دوسرا معیار مطلوب ہو تو ما ما پر ص۲ م عمود کھینچو اور م ن کو ملاؤ جو ط ص کو ص۲ پر قطع کرے، اور فرض کرو کہ م ص۱ مخروجہ لا لا سے ل۱ پر ملتا ہے۔

تب مثلثات ط ن ص۲ اور م ن ل۱ کے مشابہ ہونے کی وجہ سے

$$\frac{\text{ط ص}_۲}{\text{ط ن}} = \frac{\text{ن ل}_۱}{\text{م ل}_۱} = \frac{\text{ط ص}_۱}{\text{ھ}}$$

$$\therefore \quad \text{ط ص}_۲ = \frac{\text{ط ص}_۱ \times \text{ط ن}}{\text{ھ}}$$

طرفین کو ٹ سے ضرب دینے سے

$$\text{ط ص}_۲ \times \text{ٹ} = \frac{\text{ط ص}_۱ \times \text{ٹ} \times \text{ط ن}}{\text{ھ}}$$

لیکن پہلے حاصل ہو چکا ہے کہ $\text{ط ص}_۱ \times \text{ٹ} = \frac{\text{پٹی ط ص کا رقبہ} \times \text{ط ن}}{\text{ھ}}$

$$\therefore \quad \text{ط ص}_۲ \times \text{ٹ} = \frac{\text{پٹی ط ص کا رقبہ} \times \text{ط ن}^۲}{\text{ھ}^۲}$$

$$\therefore \quad \text{پٹی ط ص}_۲ \text{ کا رقبہ} = \frac{\text{پٹی ط ص کا دوسرا معیار لا لا کے گرد}}{\text{ھ}^۲} \quad ......(۳)$$

اب اِس عمل کو ہر ایک پٹی پر کرو اور ص۲ جیسے تمام نقاط کو ملاؤ تو دوسرے معیار کا منحنی سر ص۲ س حاصل ہوگا۔

تب دوسرے معیار کے منحنی کے بائیں طرف کا رقبہ ط ص۲ جیسی پٹیوں کے رقبوں کا حاصل جمع ہوگا۔ اس کو دوسرے معیار کا رقبہ (ب۲) کہو۔ تب

$$\text{ب}_۲ = \frac{\text{لا لا کے گرد پٹیوں کے دوسرے معیاروں کا حاصل جمع}}{\text{ھ}^۲}$$

$$= \frac{\text{آ}_{\text{لالا}}}{\text{ھ}^۲}$$

$$\therefore \quad \text{آ}_{\text{لالا}} = \text{ب}_۲ \text{ھ}^۲ \quad ....(۴)$$

ب۱ یا ب۲ کو ناپتے وقت کون سا رقبہ ناپا جائے اِس امر میں کسی قدر احتیاط کی ضرورت ہے۔ اِس میں کوئی مضایقہ نہیں کہ نیچے کی جانب انتصابی خط ط سے کھینچے جائیں یا ص سے

لیکن جب لا لا اور ماما میں سے ایک مثلاً لا لا کے گرد معیار مطلوب ہوں تو پہلے معیار کے رقبے کے لیے پہلے معیار کے منحنی کی اس جانب کا رقبہ ناپو جس سے لا لا پر عمود کھینچے گئے ہیں اور دوسرے معیار کا منحنی کھینچتے وقت پہلے معیار کے منحنی کے ص$_1$ جیسے نقاط سے دوسرے خط ماما پر عمود کھینچو اور اب بھی اسی جانب کا رقبہ ناپو جس سے لا لا پر عمود کھینچے گئے۔

اب خط ف ا_1 پر ف ا_2 لو جو ب_2 کو اسی پیمانے پر تعبیر کرے جس پر دوسرے رقبے ب، ب_1 تعبیر کیے گئے اور ا_1 ب کو ملا کر ا_2 د اس کے متوازی کھینچو۔

د ف پر ایک نصف دائرہ کھینچو اور لا لا کے متوازی ایک خط ج ع کھینچو جو اس نصف دائرے کو ع پر ملے۔

تب ج ع محور ج ج کے گرد کے گردشی نصف قطر $\text{گ}_{\text{ج}}$ کے مساوی ہوگا۔

ثبوت:—

$$\frac{\text{ف د}}{\text{ف ب}} = \frac{\text{ف ا}_2}{\text{ف ا}_1} = \frac{\text{ب}_2}{\text{ب}_1}$$

$$\therefore \quad \text{ف د} = \frac{\text{ب}_2 \times \text{ہ}}{\text{ب}_1} = \frac{\dfrac{\text{لالا}^{\text{آ}} \times \text{ہ}}{\text{ہ}^2}}{\dfrac{\text{ب} \times \text{ج ف}}{\text{ہ}}}$$

$$= \frac{\text{لالا}^{\text{آ}}}{\text{ب} \times \text{ج ف}} = \frac{\text{گ}_{\text{ا}}^{2}}{\text{ج ف}}$$

$$\text{اب} \quad \frac{\text{ف د}}{\text{ف ع}} = \frac{\text{ف ع}}{\text{ف ج}}$$

$$\therefore \quad \text{ف د} \times \text{ف ج} = \text{ف ع}^2$$

$$\therefore \quad \text{ف د} = \frac{\text{ف ع}^2}{\text{ج ف}}$$

∴   ف ع = گ$_{لا}$

اب   ف ع^{۲} = ف ج^{۲} + ج ع^{۲}

∴   گ$^{۲}_{لا}$ = ج ع^{۲} + ف$^{۲}_{لا}$

∴   ج ع^{۲} = گ$^{۲}_{لا}$ − ف$^{۲}_{لا}$

لیکن دکھایا جا چکا ہے کہ

گ$^{۲}_{ج}$ = گ$^{۲}_{لا}$ − ف$^{۲}_{لا}$

∴   ج ع = گ$_{ج}$

عددی مثال — پٹڑی کی تراش کے مرکزِ ہندسی کے گرد گردشی نصف قطر کی ترسیمی دریافت —

شکل ۳۱ع میں ایک برطانوی معیار کی ۸۵ پونڈ والی چپٹی پٹڑی کی تراش کے مرکزِ ہندسی کے گرد قاعدے کے متوازی گردشی نصف قطر کی ترسیمی دریافت دکھائی گئی ہے۔

چونکہ تراش ایک انتصابی مرکزی خط کے گرد متشاکل ہے اس لیے پہلے اور دوسرے معیار کے منحنیوں کو صرف نصف تراش کے لیے کھینچنا کافی ہے۔ اس سے عمل میں بہت آسانی ہو جائیگی۔ لا لا اور ما ما وہ اُفقی خط لیے گئے ہیں جو تراش کی چوٹی اور قاعدے کو مس کرتے ہیں۔

اب رقبے ب، ب$_{۱}$، ب$_{۲}$ سطح پیما یا حاصل جمع منحنی کے ذریعے معلوم کیے جائیں۔ (شکل کو پیچیدگی سے بچانے کے لیے پہلے اور دوسرے معیار کے منحنیوں کے حاصل جمع منحنی یہاں نہیں کھینچے گئے)۔ پہلے اور دوسرے معیار کے رقبے منحنیوں کی بائیں جانب ہیں۔

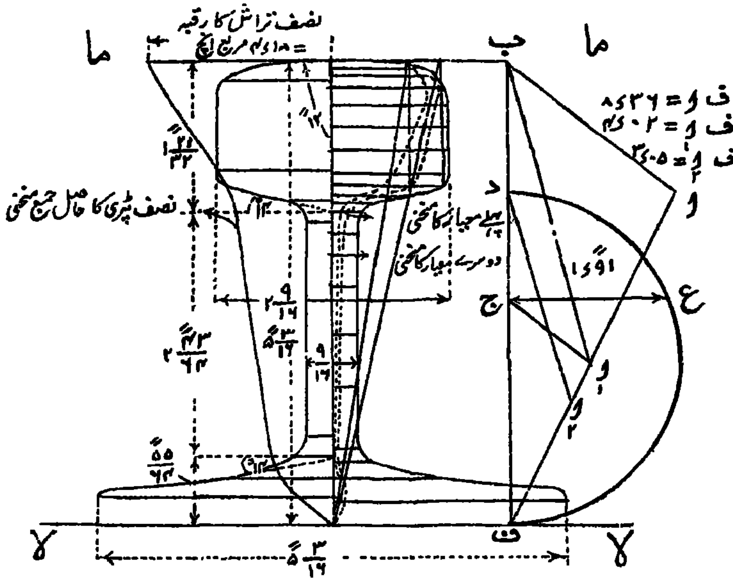
چونکہ صرف نصف تراش پر غور کیا گیا تھا اس لیے دو سے ضرب دینے سے

ب = ۸٫۳۶ مربع انچ

$ب_۱$ = ۴٫۰۲ "

$ب_۲$ = ۳٫۰۵ "

شکل کے بازو لا لا اور ما ما کے درمیان ایک انتصابی خط ف ب کھینچو اور نقاط ا، $ا_۱$، $ا_۲$ حاصل کرو جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔



شکل ۳۱ - پٹری کی تراش

تب ا ب کو ملا کر اس کے متوازی $ا_۱$ ج کھینچنے سے نقطہ ج حاصل ہوگا اور ج ف خط لا لا سے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ ہوگا۔ اور $ا_۱$ ب کو ملا کر اس کے متوازی $ا_۲$ د کھینچنے سے نقطہ د حاصل ہوگا۔

د ف پر ایک نصف دائرہ کھینچو اور ج ع افقاً کھینچو جو نصف دائرے کو ع پر ملے۔

تب ج ع = گج جو ناپنے پر ۱٫۱۹ انچ پایا جائیگا۔

اِس عمل کو طالب علم بطور مشق کے بطور خود کریں۔

اوپر کے طریقے کا اطلاق مستطیل پر

— فرض کرو کہ ا ب ج د (شکل ۳۲ع) ایک مستطیل ہے جس کا قاعدہ ض اور ارتفاع ھ ہے اور لا لا اور ما ما کو علی الترتیب ج د اور ب ا کے خطوط میں سے گزرتا ہوا لو۔ تب پہلے معیار کا منحنی وتر ب ع د ہوگا، اور دوسرے معیار کا منحنی ایک مکافی ب ف د ہوگا۔ اِس طرح

$$\text{ب}_{۱} = \frac{\text{ض ھ}}{۲}$$

$$\text{ب}_{۲} = \frac{\text{ض ھ}}{۳}$$

$$\therefore \quad \text{آ}_{\text{لالا}} = \frac{\text{ض ھ}}{۳} \times \text{ھ}^{۲} = \frac{\text{ض ھ}^{۳}}{۳}$$

$$\text{ف}_{\text{لا}} = \frac{\text{ب}_{۱} \times \text{ھ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ض ھ}}{۲} \times \frac{\text{ھ}}{\text{ض ھ}} = \frac{\text{ھ}}{۲}$$

$$\therefore \quad \text{آ}_{\text{جج}} = \text{آ}_{\text{لالا}} - \text{ب} \times \text{ف}_{\text{لا}}^{۲}$$

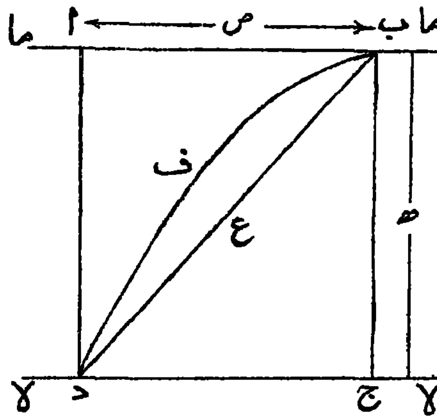
$$= \frac{\text{ض ھ}^{۳}}{۳} - \frac{\text{ض ھ} \times \text{ھ}^{۲}}{۴} = \frac{\text{ض ھ}^{۳}}{۱۲}$$

متبادل ترسیمی ساخت — موہر[1] کا طریقہ —

مرکز ہندسی کے گرد دوسرا معیار حاصل کرنے کے لیے ذیل کا ترسیمی طریقہ بعض صورتوں میں گزشتہ طریقے سے زیادہ سہولت بخش ہوگا۔ جس خط کے

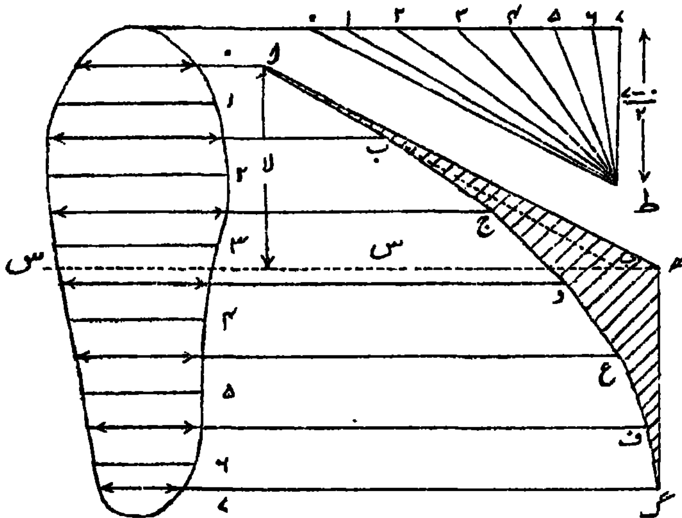
[1] Mohr

گرد معیار لینا ہیں رقبے کو اس کے متوازی مساوی عرض کی پتلی پٹیوں میں



شکل ۳۲ مستطیل کا معیارِ جمود

تقسیم کرو (شکل ۳۳) اور ہر ایک پٹی کا مرکزی خط کھینچو۔ اب اگر پٹیاں کافی پتلی



شکل ۳۳۔ جمود کے معیار کے لیے ہور کا عمل

ہوں (ہم نے پیچیدگی سے بچنے کے لیے تھوڑی سی پٹیاں لی ہیں) تو ان مرکزی خطوں کے طول ان پٹیوں کے رقبوں کو تعبیر کرینگے۔ اِس لیے ایک سمتی خط پر کسی پیمانے پر ۰، ۱، ۲، ۳، ...... ۶، ۷ کے نشان لگاؤ جو کسی پیمانے پر ان طولوں کو تعبیر کریں اور ایک قطب ط اس سمتی خط سے مجموعی طول (۰تا۷) کے ½ فاصلے پر لو۔ پھر حصہ ۰ میں کہیں بھی ایک خط ا ھ متوازی ۰، ط کے کھینچو۔ حصہ ۱ میں اب متوازی ۱، ط کے۔ حصہ ۲ میں ب ج متوازی ۲، ط کے، اور علیٰ ہذا یہاں تک کہ نقطہ گ حاصل ہو جائے۔ اب آخری کڑی گ ھ متوازی آخری خط ۷، ط کے کھینچو جو ا ھ سے ھ پر ملے۔

تب مرکزِ ہندسی ھ میں کے متوازی خط پر واقع ہوگا اور اگر سایہ دار شکل کا رقبہ بہ ہو اور اصلی شکل کا رقبہ ب تو

شکل کا آس س = ب × بہ

ثبوت۔ کسی ایک حصے مثلاً ۰، ۱ پر غور کرو اور اب کو خارج کر کے ھ میں کے افقی خط سے بَ پر ملنے دو۔ تب ریسمانی اور سمتی کثیر الاضلاع کے عمل کی رُو سے اگر ان حصوں کے رقبوں کو قوتیں تصور کیا جائے تو (دیکھو صفحہ ۷۹)۔

بَ ھ = پہلی قوت کا معیار س س کے گرد × $\frac{۱}{\text{قطبی فاصلہ}}$

$= ۰،۱ \times لا \times \frac{۱}{\frac{۱}{۲}\,\text{مجموعی رقبہ}}$

$= ۰،۱ \times لا \times \frac{۲}{ب}$

مثلث ا بَ ھ کا رقبہ $= \frac{۱}{۲}$ بَ ھ × لا

$= \frac{۲ \times لا^{۲} \times ۰،۱}{۲\,ب}$

حصے کا دوسرا معیار س س کے گرد
ـــــــــــــــــــــــــــ
ب

∴ سایہ دار شکل کا رقبہ = بہ = اصلی شکل کا دوسرا معیار س س کے گرد
ـــــــــــــــــــــــــــ
ب

یا بہ × ب = اصلی شکل کا دوسرا معیار س س کے گرد۔

اِس کا ثبوت کہ ھ سے مرکزِ ہندسی معلوم ہوگا صفحہ ۶۹ پر ملیگا جس میں ثابت کیا گیا ہے کہ پہلی اور آخری کڑی کے نقطۂ تقاطع سے حاصل کا محل معلوم ہوتا ہے اور موجودہ صورت میں یہ مقام مرکزِ ہندسی ہوگا جہاں اِن حصوں کے رقبوں کو قوتیں تصور کرنے سے اِن کا حاصل عمل کرے۔

معادل مرکزِ ہندسی اور غیر متجانس تراشوں کا دوسرا معیار

معیار ـــــ فرض کرو کہ کسی شہتیر کی تراش دو اشیاء سے بنی ہے جن کے لیے ینگ کا مقیاس مختلف ہے اور فرض کرو کہ ایک شے ش۱ کے لیے ینگ کا مقیاس دوسری شے ش۲ کا م گنا ہے۔ تب راست زور کی صورت میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ شے ش۲ اس طرح عمل کرتی ہے گویا اس کی جگہ اس کا م گنا رقبہ ش۱ کی شے کا رکھ دیا گیا ہے۔ شہتیر کی صورت میں بھی یہ ربط صحیح ہے اس لیے شے ش۲ کی جگہ اس کے م گنے عرض کا رقبہ شے ش۱ کا رکھ دیا جاسکتا ہے۔ یہ عرض اُس خط کے متوازی ہے جس کے گرد معیار لیے جائیں۔

اب اگر شے ش۱ کا رقبہ ب۱ اور ش۲ کا ب۲ ہو تو متجانس شے ش۲ کا معادل رقبہ یہ ہوگا:ـــ

$$ب_ع = ب_۲ + م\,ب_۱$$

معادل مرکزِ ہندسی کا کسی خط لا لا سے فاصلہ ف معلوم کرنے کے لیے لا لا کے گرد ان رقبوں کے الگ الگ پہلے معیار لو جو فرض کرو کہ ھ۱ اور ھ۲ ہوتے ہیں۔

تب پوری تراش دوسری شے کی ہونے سے معادل پہلا معیار

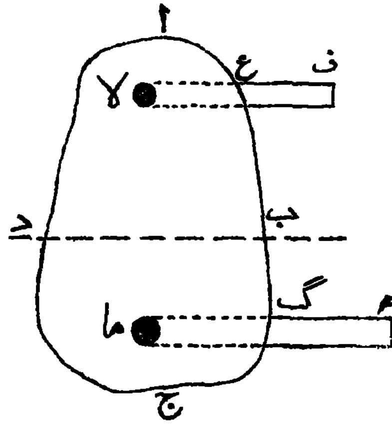
$$ه_ع = ه_۲ + م\,ه_۱$$

$$\therefore \quad ف = \frac{ه_۲ + م\,ه_۱}{ب_۲ + م\,ب_۱}$$

معادل دوسرا معیار کسی خط لا لا کے گرد معلوم کرنے کے لیے لا لا کے گرد الگ الگ دوسرے معیار لو جو فرض کرو کہ $آ_۱$ اور $آ_۲$ ہوتے ہیں۔ تب پوری تراش دوسری شے کی ہونے سے معادل دوسرا معیار

$$آ_ع = آ_۲ + م\,آ_۱$$

اس کی عددی مثالیں اور مزید بیان مرکب شہتیروں اور محکم شہتیروں کی بحث میں دینگے۔ اوپر کے استدلال کو ترسیماً یوں دکھایا جاسکتا ہے:۔ فرض کرو کہ ا ب ج د (شکل ۳۴) کوئی رقبہ ہے جس میں مختلف



شکل ۳۴

شے کی دو سلاخیں لا اور ھا گڑی ہوئی ہیں۔ کسی خط مثلاً نقطہ دار خط د ب کے

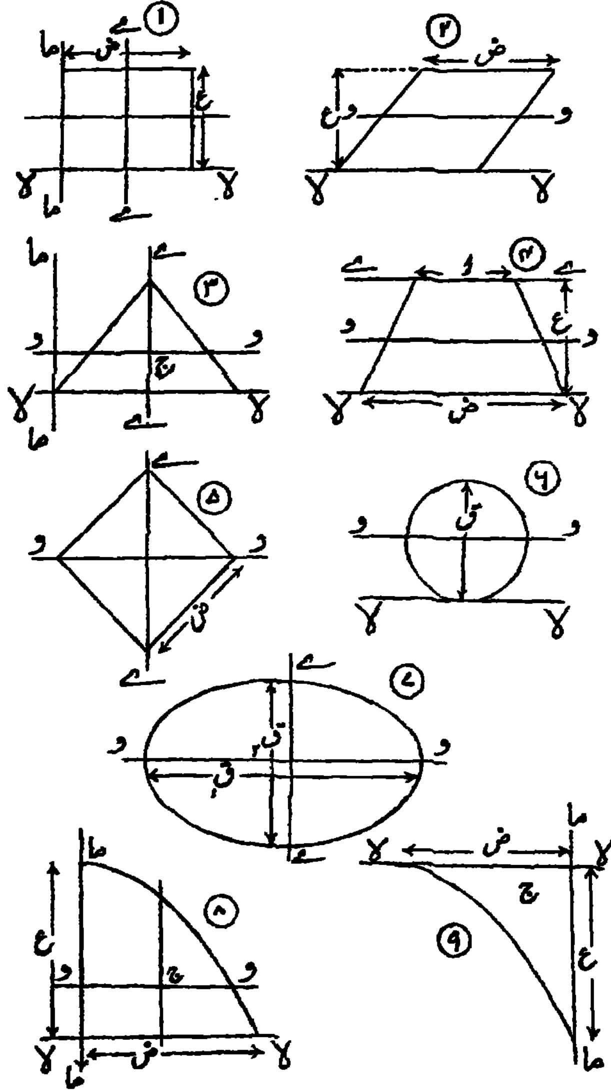
گردو معیار حاصل کرنے کے لیے ایک پٹی ع ف لو جو لا کی بلندی پر ہو اور جس کا رقبہ لا کے رقبے کا (م-۱) گنا ہو اور اسی طرح ایک پٹی گ ﻻ جس کا رقبہ ھا کا (م-۱) گنا ہو۔

تب دی ہوئی غیر متجانس شکل کا معادل پہلا اور دوسرا معیار وہی ہوگا جو متجانس شکل ا ع ف ب گ ھ ج د کا ہوگا۔

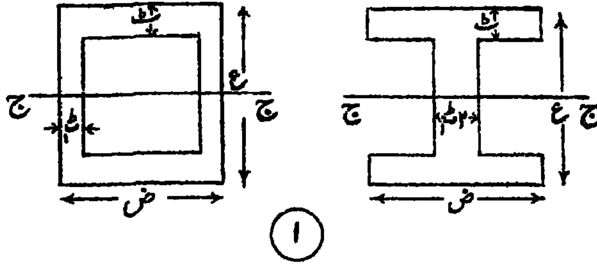
ع ف کو لا کا (م-۱) گنا اس لیے لیا جاتا ہے کہ سلاخ اپنے رقبے کا ایک گنا رقبہ تو خود گھیرتی ہے۔ اس طرح دوسری شے کا معادل رقبہ = لا کا {(م-۱) + ۱} گنا = لا کا م گنا۔

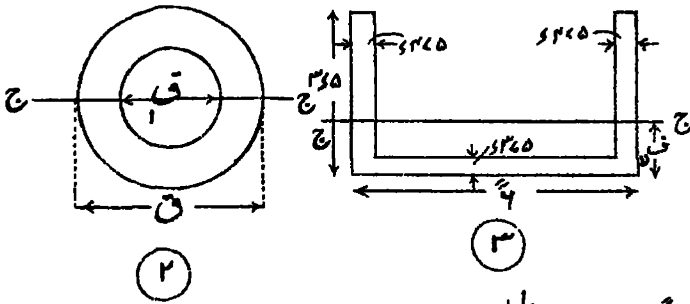
کثیر الاستعمال اشکال کے رقبے، مرکزِ ہندسی کے محل، اور معیارِ جمود
(دیکھو شکل ۳۵)

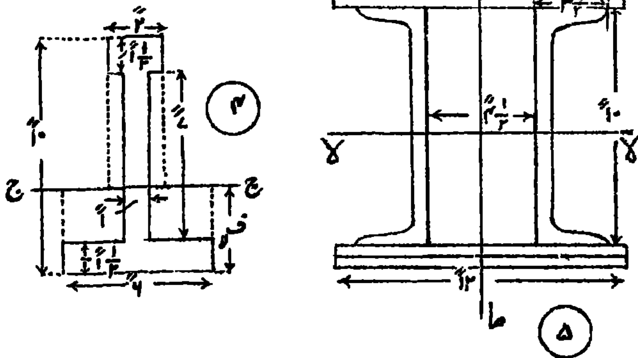
نمبر	شکل	رقبہ	مرکزِ ہندسی کا محل		معیارِ جمود			
			لالا سے	ماما سے	آ لالا	آ ماما	آ وو	آ ےے
۱	مستطیل	ض ع	$\frac{ع}{۲}$	$\frac{ض}{۲}$	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۳}$	$\frac{ع\,ض^{۳}}{۳}$	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۱۲}$	$\frac{ع\,ض^{۳}}{۱۲}$
۲	متوازی الاضلاع	ض ع	$\frac{ع}{۲}$	—	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۳}$	—	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۱۲}$	—
۳	مثلث	$\frac{ض\,ع}{۲}$	$\frac{ع}{۳}$	$\frac{ض}{۲}$	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۱۲}$	$\frac{۷\,ع\,ض^{۳}}{۴۸}$	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۳۶}$	$\frac{ع\,ض^{۳}}{۴۸}$
۴	منحرف (ا = ن ب)	$\frac{ض\,ع}{۲}(۱+ن)$	$\frac{ع}{۳}\left(\frac{۲ن+۱}{ن+۱}\right)$	—	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۱۲}(۳ن+۱)$	—	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۳۶}\left(\frac{ن^{۲}+۴ن+۱}{ن+۱}\right)$	$\frac{ض\,ع^{۳}}{۱۲}(ن+۳)$
۵	مربع	$ض^{۲}$	—	—	—	—	$\frac{ض^{۴}}{۱۲}$	$\frac{ض^{۴}}{۱۲}$
۶	دائرہ	$\frac{\pi\,ق^{۲}}{۴}$	$\frac{ق}{۲}$	—	$\frac{۵\pi\,ق^{۴}}{۶۴}$	—	$\frac{\pi\,ق^{۴}}{۶۴}$	—
۷	ناقص	$\frac{\pi\,ق_{۱}\,ق_{۲}}{۴}$	—	—	—	—	$\frac{\pi\,ق_{۱}^{۳}\,ق_{۲}}{۶۴}$	$\frac{\pi\,ق_{۱}\,ق_{۲}^{۳}}{۶۴}$
۸	مکافی (اندرون)	$\frac{۲}{۳}$ ض ع	$\frac{۲}{۵}$ ع	$\frac{۳}{۸}$ ض	$\frac{۱۶}{۱۰۵}\,ض\,ع^{۳}$	$\frac{۲}{۱۵}\,ع\,ض^{۳}$	$\frac{۸}{۱۷۵}\,ض\,ع^{۳}$	—
۹	مکافی (بیرون)	$\frac{۱}{۳}$ ض ع	$\frac{۳}{۱۰}$ ع	$\frac{ض}{۴}$	—	—	—	—



شکل ۳۵ — عام شکلوں کے خواص







شکل ۳۶ - جمود کے معیار وغیرہ

برطانوی معیاری فولادی تراشوں کے خواص کے لیے دیکھو ضمیمہ ـ

تعمیروں میں استعمال ہونے والی تراشوں کے معیارِ جمود اور گردشی نصف قطر کا محسوب کرنا ـــ کوئی تراش ایسی شکلوں پر مشتمل ہو جن کے معیارِ جمود معلوم ہوں تو اس کا معیارِ جمود اِن حصوں کے معیاروں کو جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔ اِسی طرح اگر تراش دو معلومہ شکلوں کا حاصل تفریق ہو تو معیارِ جمود ان کے معیاروں کو تفریق کرنے سے حاصل ہوگا۔

ذیل کی مثالوں سے اِس کا طریقِ عمل واضح ہوگا۔ دیکھو اشکال ۳۶ اور ۳۷ ـ

(۱) **بکسی یا I تراش** ـــ جہاں تک خاج ج کا تعلق ہے یہ ہندسی طور پر ایک دوسرے کے معادل ہیں کیونکہ اگر بکسی (Box) تراش کو انتصابی خط سے دو نصفوں میں کاٹ کر اِن نصفوں کو پشت بہ پشت ملایا جائے تو I تراش حاصل ہوگی۔ اِس طرح

$$آ_{جج} = \frac{ض ع^{3} - (ض - ۲ ٹ)(ع - ۲ ٹ)^{3}}{۱۲}$$

(۲) **کھوکھلی مدوّر تراش**

$$آ_{جج} = \frac{\pi}{۶۴}(ق^{4} - ق_{1}^{4})$$

اگر دھات کی موٹائی بہت چھوٹی ہو اور ٹ کے مساوی ہو تو

$$آ_{جج} = \text{تقریباً } \frac{\pi ق^{3} ٹ}{۸}$$

(۳) **نالی تراش** (پہلوؤں کے میلان اور کونوں کی گولائی کو نظر انداز کرتے ہوئے)۔ شکل ۳۶ (۳) میں دکھائی ہوئی تراش پر غور کرو۔

رقبہ = ب = ۳٫۵ × ۰٫۴۷۵ + ۵٫۰۵ × ۰٫۳۷۵ + ۳٫۵ × ۰٫۴۷۵ = ۵٫۲۱۹ مربع انچ

خط ۷۷ سے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ ف معلوم کرنے کے لیے ۷۷ کے

گرد پہلا معیار لو - تب

ب × ف‌لا = ۳٫۵ × ٫۴۷۵ × ۳٫۵ / ۲ + ٫۳۷۵ × ٫۳۷۵ × ۵٫۰۵ / ۲

+ ۳٫۵ × ٫۴۷۵ × ۳٫۵ / ۲

= ۲٫۹۱۰ + ٫۳۵۴ + ۲٫۹۱۰ = ۶٫۱۷۵

∴ ف‌لا = ۶٫۱۷۵ / ۵٫۲۱۹ = ۱٫۱۸۵ انچ

لا لا کے گرد دوسرا معیار = آ‌لالا

= (۳٫۵)³ × ٫۴۷۵ / ۳ + (٫۳۷۵)³ × ۵٫۰۵ / ۳ + (۳٫۵)³ × ٫۴۷۵ / ۳

= ۶٫۷۷۵ + ٫۰۸۹ + ۶٫۷۷۵ = ۱۳٫۶۳۹ انچ اکائیاں

∴ آ‌جج = آ‌لالا − ب × ف‌لا²

= ۱۳٫۶۳۹ − (۵٫۲۱۹ × (۱٫۱۸۵)²)

= ۱۳٫۶۳۹ − ۷٫۳۲۳ = ۶٫۳۱۶ انچ اکائیاں

∴ گ‌جج = √(آ / ب) = ۱٫۰۱۰ انچ

(۴) ڈھلے لوہے کے شہتیروں کی تراشیں۔

رقبہ = ب = ۲ × ۱½ + ۷ × ۱ + ۶ × ۱½ = ۱۹ مربع انچ

قاعدے کے گرد معیار

ب × ف‌لا = ۲ × ۹٫۲۵ + ۷ × ۵ + ۹ × ٫۷۵

= ۲۷٫۷۵ + ۳۵ + ۶٫۷۵ = ۶۹٫۵ انچ اکائیاں

∴ ف‌لا = ۶۹٫۵ / ۱۹ = ۳٫۶۵۸ انچ

∴ آ‌جج = (۳٫۶۵۸)³ × ۶ / ۳ − (۲٫۱۵۸)³ × ۵ / ۳ + (۶٫۳۴۲)³ × ۲ / ۳ − (۴٫۸۹۲)³ × ۱ / ۳

<u>= ۲۱۹٫۹۵ انچ اکائیاں</u>

(۵) نرم فولاد کے ستون کی ساختہ تراش — دو ۱۰×۳½×۲۸٫۲۱ کی نالیوں اور چار ۱۲″×½″ کی تختیوں سے بنی ہوئی۔ گلا اور گما مطلوب۔ معیاری تراشوں کی جدول سے نالی دار تراشوں کے متعلق حسبِ ذیل مواد حاصل ہوتا ہے :—

ہر ایک کا رقبہ ۸٫۲۹۶ مربع انچ

مرکزِ ہندسی میں کے محور ٧٧ کے گرد آ = ۱۱۷٫۹ انچ اکائیاں

〃 〃 〃 ماما 〃 = ۸٫۱۹۴

مرکزِ ہندسی کا فاصلہ پیٹھ سے = ۰٫۹۳۳ انچ

∴ تراش کا مجموعی رقبہ = (۴ × ۱۲ × ½) + (۲ × ۸٫۲۹۶)

= ۴۰٫۵۹۲ مربع انچ

٧٧ کے گرد معیارِ جمود :—

۲ نالیاں (ہر ایک کا ۱۱۷٫۹) = ۲۳۵٫۸

۱۲×½ انچ کی تختیوں کے دو جوڑوں کا مرکزِ ہندسی کے گرد = ۲ × ۱۲ × ۳(۱) / ۱۲ = ۲٫۰

تختیوں کے دو جوڑوں کے لیے ب × ف۲ = ۲ × ۱۲ × ۲(۵٫۵) = <u>۷۲۶٫۰</u>

مجموعہ = <u>۹۶۳٫۹</u>
انچ اکائیاں

∴ گلا = √(۹۶۳٫۹ / ۴۰٫۵۹۲) = ۴٫۹۰ انچ

ماما کے گرد معیارِ جمود :—

چار ۱۲×½ انچ کی تختیوں کا مرکزِ ہندسی کے گرد = ۴ × ½ × ۳(۱۲) / ۱۲ = ۲۸۸٫۰

۲ نالیاں مرکزِ ہندسی کے گرد = ۲ × ۸٫۱۹۴ = ۱۶٫۴

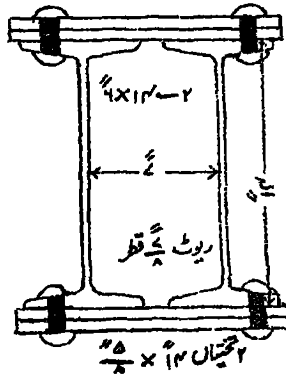
دونوں نالیوں کے ب × فا۲ = ۲ × ۸٫۲۹۶ × (۳٫۱۸۳)۲ = ۱۶٫۸۰

مجموعہ = ۴۷٫۲۶۹

∴ گ۱ = √(۴۷٫۲۶۹ / ۴۰٫۵۹۲) = ۱٫۰۸۱ انچ

(۶) شہتیر کی ساختہ تراش ——— ۱۴ انچ × ۶ انچ × ۴۶ پونڈ

کے دو I شہتیروں اور ۱۴ انچ × ⅝ انچ کی چار تختیوں سے بنی ہوئی (شکل ۳۷)۔ $\frac{آ}{۷۷}$ مطلوب۔



شکل ۳۷

معیاری تراشوں کی جدولوں سے I شہتیروں کے لیے یہ مواد حاصل ہوتا ہے:—

ہر ایک کا رقبہ = ۱۳٫۵۳

" $\frac{آ}{۷۷}$ = ۴۴۰٫۵

ہر ایک کور کی اوسط موٹائی = ۰٫۶۹۸ انچ

پوری تراش کا آ لالا (ریوٹوں سے قطع نظر کرکے)۔

آ لالا دو I شہتیروں کا = ۲ × ۴۴۰٫۵ = ۸۸۱

آ دو جوڑ تختیوں کا مرکزِ ہندسی کے گرد = (۱۴ × ۲)/۱۲ × (۵/۴)^۳ = ۴٫۸

ب × ف^۲ دو جوڑ تختیوں کے لیے = ۴ × ۱۴ × ۵/۸ × (۷٫۶۲۵)^۲ = ۲۰۳۵

مجموعہ .... = ۲۹۲۰٫۸

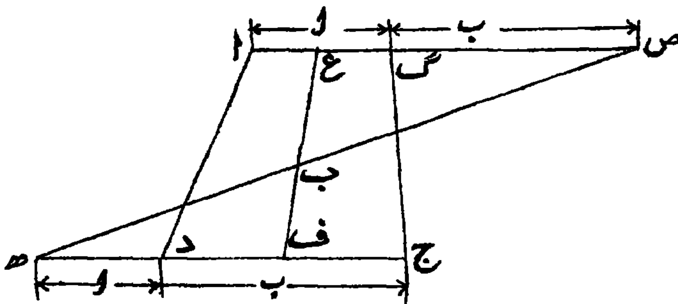
ریوٹوں کا لحاظ (ریوٹ کا آ اِس کے مرکزِ ہندسی کے گرد نظر انداز کرتے ہوئے)۔

ہر ایک سوراخ کا رقبہ = (۲ × ۵/۸ + ۰٫۶۹۸) × ۷/۸ = ۱٫۷۰۴

مرکزِ ہندسی کا فاصلہ لا لا سے = ۷٫۲۷۶

∴ ریوٹوں کا آ لالا = ۴ × ۱٫۷۰۴ × (۷٫۲۷۶)^۲ = ۳۶۰٫۸

∴ خالص آ لالا = ۲۹۲۰٫۸ − ۳۶۰٫۸ = ۲۵۶۰



شکل ۳۸۔ مخرف کا مرکزِ ہندسی

(۷) ساختہ تراشیں — تقریبی طریقہ — ساختہ تراشوں کے معیارِ جمود کو تقریبی طور پر اس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے کہ I شہتیروں یا نالیوں کے معیارِ جمود میں تختیوں کے ب × ف^2 میں جمع کیا جائے جس میں ب کے لیے تختیوں کا خالص رقبہ لیا جائے اور ف تختیوں کے ایک سٹ کے مرکز کا فاصلہ لا لا سے ہے۔

گزشتہ مثال ہی کی تراش پر اس طریقے کا استعمال کریں تو آ$_{لالا}$ حسب ذیل حاصل ہو گا:-

آ$_{لالا}$ دو I شہتیروں کا = ۲ × ۴۲۰٫۵ = ۸۸۱

ب × ف^2 تختیوں کا = ۴ × $\frac{۵}{۸}$(۱۴ − ۲ × $\frac{۷}{۸}$) × (۷٫۶۲۵)^2 = ۱۷۸۱

مجموعی آ$_{لالا}$ کی تقریبی قیمت = ۲۶۶۲ انچ اکائیاں

منحرف کے مرکزِ ہندسی کے لیے ساخت — منحرف کا مرکزِ ہندسی معلوم کرنے کے لیے ذیل کا ترسیمی عمل چنائی کی تعمیروں میں کارآمد ثابت ہو گا۔

فرض کرو کہ ا د ج گ ایک منحرف ہے (شکل ۳۸) متوازی اضلاع اگ اور ج د کی تنصیف ع اور ف پر کرو اور ع ف کو ملاؤ۔

اگ کو ص تک خارج کر کے گ ص کو د ج کے طول ب کے مساوی بناؤ اور ج د کو ھ تک خارج کر کے د ھ کو ا گ کے طول و کے مساوی بناؤ۔

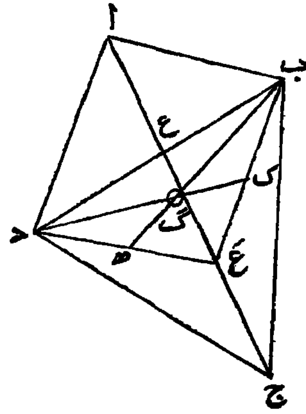
ھ ص کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ع ف کو ب پر قطع کرتا ہے۔

تب ب منحرف کا مطلوبہ مرکزِ ہندسی ہو گا۔

ذو اربعۃ الاضلاع کے مرکزِ ہندسی کے لیے ساخت —

فرض کرو کہ کسی ذواربعۃ الاضلاع کے وتروں اج اور ب د کا نقطۂ تقاطع ع ہے (شکل ۳۹ع)۔ ج سے ج ا پر ج عَ مساوی اع کے بناؤ اور د عَ اور ب عَ کو ملاؤ۔ تب ذواربعۃ الاضلاع کا مرکزِ ہندسی وہی ہوگا جو مثلث ب عَ د کا ہے۔

∴ ب عَ اور عَ د کی تنصیف ک اور ھ پر کرو اور د ک اور ب ھ کو ملاؤ۔ تب اِن کا نقطۂ تقاطع گ مطلوبہ مرکزِ جاذبہ ہوگا۔

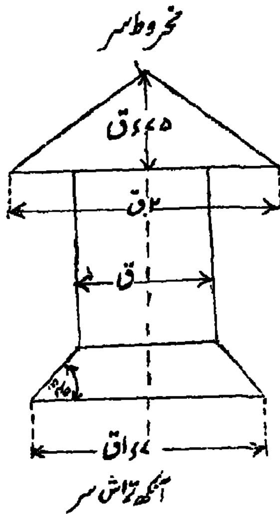


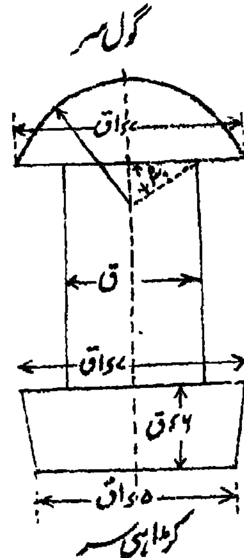
شکل ۳۹ع۔ ذواربعۃ الاضلاع کا مرکزِ ہندسی

چوتھا باب

ریوٹ دار جوڑ اور رابطے

ریوٹوں کے سروں کی شکلیں —— ریوٹوں کے سروں کی سب سے زیادہ کثیر الاستعمال شکلیں اور ان کے معمولی تناسب اشکال ۴۰ تا ۴۱ میں دکھائے گئے ہیں۔





شکل ۴۰ و ۴۱ ۔ ریوٹوں کے سروں کی شکلیں

تعمیری کاموں میں گول سر والے (Snap headed) ریوٹ سب میں زیادہ استعمال ہوتے ہیں لیکن جہاں ضروری ہو وہاں تختی کی سطح سے ابھار کو روکنے کے لیے آنکھ تراشے ریوٹ (Countersunk rivets) بھی استعمال ہوتے ہیں۔ گول سروں میں ریوٹ کا طول قطر کا تقریباً ۱½ گنا ہوتا ہے۔

عملاً دستور یہ ہے کہ سرد حالت میں ریوٹ کا قطر سوراخ کے قطر سے ۱/۱۶ انچ کے بقدر کم ہو لیکن حسابات میں عموماً ریوٹ کا قطر وہی لیا جاتا ہے جو سوراخ کا ہوتا ہے۔

ریوٹوں کا قطر ــــــ اَنوِن (Unwin) کا ضابطہ یہ ہے کہ ریوٹ کا قطر = ۱٫۲ √م جہاں م سب میں پتلی تختی کی موٹائی ہے لیکن تعمیری کاموں میں یہ قاعدہ بہت کم اختیار کیا جاتا ہے۔ عملاً جہاں کہیں ممکن ہو ۳/۴" یا ۷/۸" کا ریوٹ استعمال کیا جاتا ہے اور بہتر یہی ہے کہ کسی ضابطے سے قطر کو تختی کی موٹائی کی رقوم میں حاصل نہ کیا جائے۔ بعض ماہرین ۳/۸" والی تختی کے لیے ۳/۴" کا ریوٹ، ۱/۲" والی کے لیے ۷/۸"، اور ۵/۸" کے لیے ۱" استعمال کرتے ہیں۔ ۱ انچ سے بڑے قطر کے ریوٹوں کو ہاتھ سے ٹھونکنا مشکل ہے۔

جوڑوں کی قسمیں ــــــ (۱) آغوش جوڑ اور الصاقی جوڑ ــــ آغوش جوڑ میں تختیاں ایک دوسری پر چڑھ جاتی ہیں جیسا کہ شکل ۴۲ میں دکھایا گیا ہے۔ جوڑ کی اس قسم میں نقص یہ ہے کہ کھینچ کا خط ایسا ہوگا کہ اس سے خماؤ کے زور پیدا ہونگے جن کا اقتضا جوڑ کی شکل بگاڑ دینے کا ہوگا جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔

الصاقی جوڑ میں تختیوں کے کنارے آکر بھڑ جاتے ہیں اور ان کے اوپر اور نیچے ڈھکن تختیاں لگائی جاتی ہیں جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔ ڈھکن تختی کی موٹائی اصلی تختیوں کی ۵/۸ ہوتی ہے۔ جوڑ کی اس قسم میں کھینچ مرکزی ہوتی ہے اور اس طرح خماؤ کے زور نہیں پیدا ہوتے۔

واحد ڈھکن تختی کے جوڑ ہیں جو کہ آغوش جوڑ اور الصاقی جوڑ کی ایک آمیزش ہے خماؤ کے زور پیدا ہوتے ہیں جو جوڑ کی شکل بگاڑنے کا اقتضا رکھتے ہیں جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔

اوپر کے بیان سے ظاہر ہے کہ جہاں کہیں ممکن ہو الصاقی جوڑ اختیار کرنا چاہیے۔

(ب) زنجیری ریوٹ کاری اور کج مج یا لہریا ریوٹ کاری

جوڑیں ریوٹوں کی مختلف قطاروں کو زنجیری (Chain) شکل ہیں یا لہریا (Zigzag) شکل میں ترتیب دیا جا سکتا ہے جیسا کہ اشکال ۴۳ و ۴۴ میں دکھایا گیا ہے۔ جیسا کہ ہم آگے چل کر دکھائینگے۔لہریا قسم زیادہ باکفایت ہوتی ہے اور جہاں کہیں ممکن ہو یہی استعمال کی جائے۔

ریوٹ دار جوڑ کی ناکارگی کے طور

ریوٹ دار جوڑ ذیل کے اطوار میں سے کسی ایک طور پر ناکارہ ہو سکتا ہے :۔

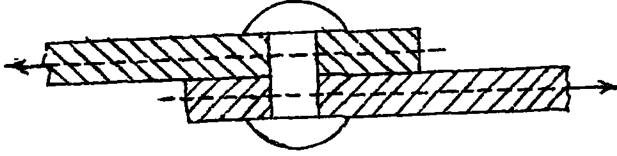
(۱) تختی کے پھٹ جانے سے۔
(۲) ریوٹوں کے کترے جانے سے۔
(۳) ریوٹوں کے کچلے جانے سے۔
(۴) تختی کے کنارے کے چر جانے سے۔
(۵) تختی کے کترے جانے سے۔

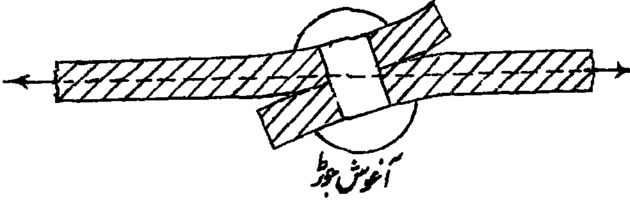
شکل ۴۵ میں ناکارگی کے ان اطوار کو دکھایا گیا ہے۔

(۴) اور (۵) کی رعایت ذیل کے قاعدے سے رکھی جاتی ہے :۔ ریوٹ کے مرکز سے تختی کے کنارے تک اقل فاصلہ $\frac{3}{2}$ ق رکھا جاتا ہے جہاں ق ریوٹ کا قطر ہے۔

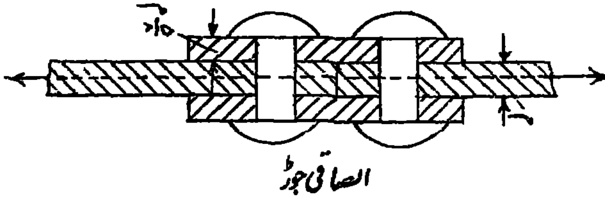
اگر اس قاعدے کی پابندی کی جائے تو جوڑ کی ناکارگی ہمیشہ (۱)، (۲)، (۳) میں سے کسی ایک طور پر ہوگی۔

کسی جوڑ کی تجویز میں مدِ نظر یہ امر رہنا چاہیے کہ ناکارگی کے مختلف

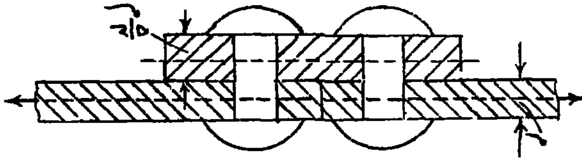


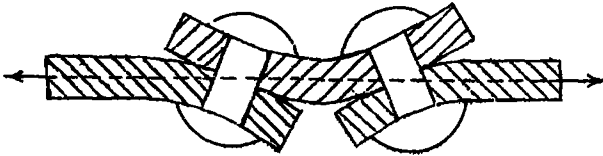


آغوش جوڑ



الصاقی جوڑ



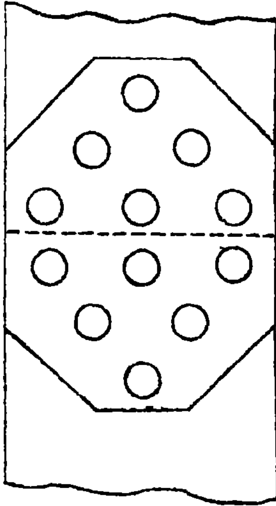


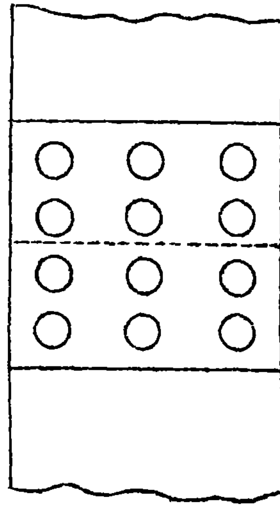
واحد ڈھکن تختی کے جوڑ

شکل ۱۲۴ ۔ ریوٹ دار جوڑوں کی قسمیں

اطوار میں سے ہر ایک طور کے لیے مساوی قوت درکار ہو۔
اب ہم ناکارگی کے مختلف اطوار پر تفصیل کے ساتھ غور کرینگے۔ ہر صورت میں تختی کی ایک پٹی پر غور کیا جائیگا جس کا عرض ریوٹوں کی گھائی کے مساوی ہو۔

(۱) تختی کا پھٹاؤ — اس صورت میں عرض جس پر ناکارگی واقع ہوگی (گ۔ق) ہوگا اور چونکہ تختی کی موٹائی م ہے اس لیے شکستگی کا رقبہ = (گ۔ق) م

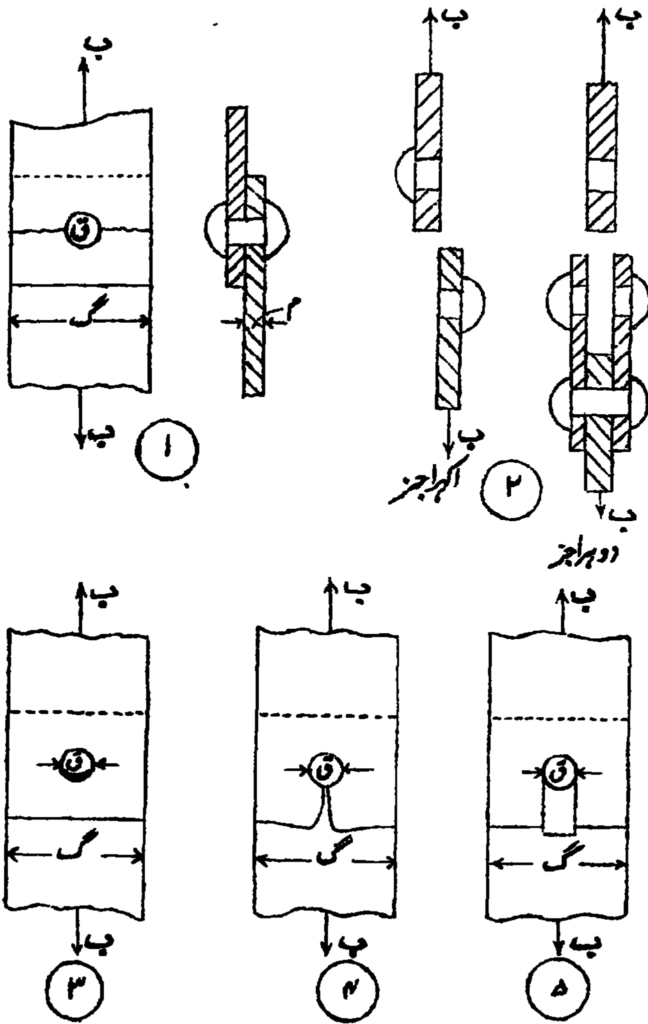

شکل ۲۲۔ کج مج یا لہردار ریوٹ کاری


شکل ۲۳۔ زنجیری ریوٹ کاری

اس لیے اگر زت مادے کا بے خطر تنشی زور ہو تو بے خطر بوجھ جو جوڑ برداشت کر سکیگا، یہ ہوگا:—

ب = زت (گ۔ق) م ....(۱)

(۲) ریوٹوں کا کترا جانا۔
اکہرے جز کی صورت میں، کترا ہوا رقبہ = $\frac{\pi}{4}$ ق^۲
دوہرے " " " " = $\frac{2\pi}{4}$ ق^۲



شکل ۴۵

[نوٹ۔ مجلس تجارت کا ایک قانون یہ ہے کہ دوہرے جز میں رقبہ $\frac{1.75 \pi ق^2}{4}$ لیا جائے لیکن تعمیری کاموں میں اس قانون کی ہر جگہ پابندی نہیں کی جاتی]۔

اس لیے اگر ریوٹ کے مادّے کے لیے بے خطر جزی زور نج ہو تو ریوٹ کے جز کے لحاظ سے جوڑ پر بے خطر قوت اکہرے اور دوہرے جز کے لیے یہ ہوگی:—

$$\left.\begin{aligned} ب &= نج \times \frac{\pi ق^2}{4} \\ ب &= نج \times \frac{2\pi ق^2}{4} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (۲)$$

(۳) ریوٹوں کا کچلا جانا۔ اس صورت میں کچلا جانے والا رقبہ (جس کو مسندی رقبہ بھی کہتے ہیں) ریوٹ کے قطر ضرب تختی کی موٹائی کے مساوی لیا جائے یعنی ق×م۔ اس لیے اگر ریوٹ کے مادّے پر بے خطر مسندی زور نم ہو تو مسند کے لحاظ سے جوڑ پر بے خطر قوت یہ ہوگی:—

$$ب = نم \times ق \times م \cdots\cdots\cdots\cdots (۳)$$

نم اور نج کی قیمتیں وہ لی جا سکتی ہیں جو باب ۲ میں دی گئی ہیں۔

نم کی قیمت نرم فولاد کے لیے ۱۰ ٹن فی مربع انچ اور پٹواں لوہے کے لیے ۸ ٹن فی مربع انچ لی جا سکتی ہے۔ یہ مقداریں معمولی فشار سے زیادہ ہیں اور تجربات کے ذریعے حاصل کی گئی ہیں۔

تعمیری کاموں میں جوڑ کی مضبوطی مسند میں جز سے اکثر کم ہوگی کیونکہ تختیوں کی موٹائی ریوٹ کے قطر سے عموماً کم ہوتی ہے۔

جوڑ کی استعداد—— جوڑ کی استعداد وہ نسبت فیصدی ہے جو جوڑ کی اقل مضبوطی کو ٹھوس جوڑ کی مضبوطی سے ہو یعنی

$$\text{استعداد} = ع = \frac{\text{جوڑ کی اقل مضبوطی}}{\text{ٹھوس تختی کی مضبوطی}}$$

عددی مثالیں ۔ ذیل کی عددی مثالوں سے ریوٹ دار جوڑوں کے حسابات واضح ہوجائینگے :۔

(۱) ایک پُل میں ایک بند ھن سلاخ ایک چپٹی فولادی سلاخ کی ہے جس کی چوڑائی ۹ انچ اور موٹائی $\frac{1}{2}$ ۱ انچ ہے ۔ اس میں ایک دو ھوا الصاقی جوڑ لگانا ہے ۔ ریوٹوں کا قطر اور ان کی تعداد حاصل کرواور خاکے بناؤ جن سے ریوٹوں کی مناسب گھائی اور ترتیب معلوم ھو ۔ (بی ۔ ایس سی ۔ لنڈن)

انون[1] کے ضابطے سے ق = ۱٫۲ $\sqrt{م}$ = ۱٫۴۷ انچ ۔ لیکن عملاً یہ بہت زیادہ ہے اس لیے ق = ۱ انچ لو۔

فرض کرو کہ ریوٹ لہریا طور پر ترتیب دیے گئے ہیں ۔ تب جوڑوں کی مضبوطی بیرونی ریوٹ کے سوراخ میں سے پھٹ جانے کے لحاظ سے ۷ $(۹-۱) \times \frac{۵}{۴}$ = ۷۰ ٹن ہوگی ۔

ایک ریوٹ کی جزی مضبوطی = $۵ \times \frac{\pi}{۴} \times (۱)^۲$ = ۷٫۸۵ ٹن

∴ جز کے لیے ریوٹوں کی مطلوبہ تعداد = $\frac{۷۰}{۷٫۸۵}$ = ۸٫۹۲ = ۹ فرض کرو۔

ایک ریوٹ کی مسندی مضبوطی = $۱۰ \times ۱ \times \frac{۵}{۴}$ = ۱۲٫۵ ٹن

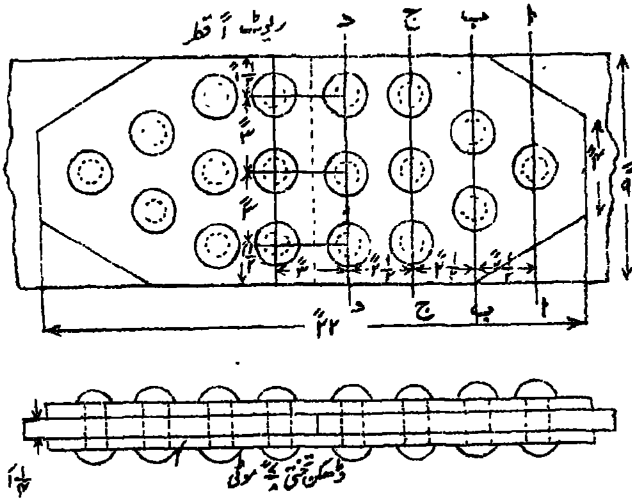
∴ مسند کے لیے ریوٹوں کی مطلوبہ تعداد = $\frac{۷۰}{۱۲٫۵}$ = ۶ فرض کرو

∴ ۹ ریوٹ مسند کے لیے بہت کافی ہونگے ۔

اس طرح جوڑ شکل ۲۶ کی طرح ترتیب دیا جائیگا ۔ مرکزی دو قطاریں

[1] Unwin

زنجیری شکل میں (Chain-riveted) ہونگی۔



شکل ۴۶

اب ہم اس جوڑ کی مضبوطی ناکارگی کے مختلف اطوار کے لحاظ سے دیکھینگے۔

اگر تختی خط ا ا پر پھٹے تو اس کے لیے زور کی بے خطر حد جیسا کہ ہم دکھا چکے ہیں ۷۰ ٹن ہوگی۔

اب فرض کرو کہ تختی ب ب پر پھٹتی ہے اور ا ا کا ریوٹ کترا جاتا ہے۔

خط ب ب کی مضبوطی = ۷ × (۹-۲) × ۵/۴ = ۶۱٫۲۵ ٹن

اور ایک ریوٹ کی مضبوطی = ۷٫۸۵ ٹن

∴ ب ب پر ناکارگی کے خلاف مجموعی مضبوطی = ۶۱٫۲۵ + ۷٫۸۵ = ۶۹٫۱ ٹن

اب فرض کرو کہ تختی ج ج پر پھٹتی ہے اور باہر کے تین ریوٹ کترے جاتے ہیں۔

خط ج ج کی مضبوطی = ۷ (۹-۳) × ۵/۴ = ۵۲٫۵ ٹن

تین ریوٹوں کی مضبوطی = ۲۳٫۵۵ ٹن

∴ ج ج پر ناکارگی کی مزاحمت = ۵۲٫۵ + ۲۳٫۵۵ = ۷۶٫۰۵ ٹن

اب فرض کرو کہ ڈھکن تختیاں د د پر پھٹتی ہیں۔
یہ مضبوطی = ۷ × (۹-۳) × ۲ × $\frac{۷}{۸}$ = ۷۳ء۵ ٹن
اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ سب میں کم زور تراش ب ب ہے۔

∴ جوڑ کی استعداد = $\frac{\text{جوڑ کی اقل مضبوطی}}{\text{ٹھوس تختی کی مضبوطی}}$

= $\frac{۶۹ء۱}{۷ \times \frac{۵}{۴} \times ۹}$ = $\frac{۶۹ء۱}{۷۸ء۸}$ = ۸۷ء۸ فیصد

اگر لہریا ریوٹ کاری کی بجائے زنجیری ریوٹ کاری اختیار کرتے جس میں تین تین ریوٹوں کی تین قطاریں رکھتے (اِس طرح کُل ریوٹ ۹ ہوتے) تو اقل مضبوطی (۹-۳) × $\frac{۵}{۴}$ × ۷ = ۵۲ء۵ ٹن ہوتی اور

جوڑ کی استعداد = $\frac{۵۲ء۵}{۷۸ء۸}$ = ۶۶ء۷ فی صد

اگر زنجیری ریوٹ کاری کے دو دو ریوٹوں کی چار قطاریں ہوتیں (اِس طرح کُل ۸) تو اقل مضبوطی (۹-۲) × $\frac{۵}{۴}$ × ۷ = ۶۱ء۲۵ ٹن ہوتی اور

جوڑ کی استعداد = $\frac{۶۱ء۲۵}{۷۸ء۸}$ = ۷۷ء۷ فی صد

اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ لہریا ریوٹ کاری زنجیری ریوٹ کاری سے زیادہ بااستعداد اور اس طرح زیادہ باکفایت ہوتی ہے۔

(۲) ایک دو قطاری آغوش جوڑ $\frac{۱}{۲}$ انچ موٹی فولادی تختیوں کو فولادی ریوٹوں سے جوڑنے کے لیے تجویز کرو۔ تختیوں کی تنفشی مضبوطی سوراخ کرنے سے پہلے ۳۰ ٹن فی مربع انچ، ریوٹوں کی جزی مضبوطی ۲۴ ٹن فی مربع انچ، اور فولاد کی فشاری مضبوطی ۴۳ ٹن فی مربع انچ ہے۔ جوڑ کی استعداد معلوم کرو۔
(اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ اِی)

۱/۲ انچ کی تختی کے لیے اَنوِن کے ضابطے سے

ق = ۱ء۲ √۵ء = ۸۵ء انچ یا ۷/۸ انچ لو

جوڑ دو قطاری آغوش جوڑ ہے اس لیے گھائی کے مساوی عرض میں دو ریوٹ اُکھرے جڑیں ہونگے۔

∴ پھٹنے کے خلاف مضبوطی فی گھائی = زپ (گ ـ ق) م

= ۳۰ (گ ـ ق) × ۱/۲ = ۱۵ (گ ـ ق) ..... (۱)

∴ کترے جانے کے خلاف مضبوطی فی گھائی = زج (۲π ق²)/۴

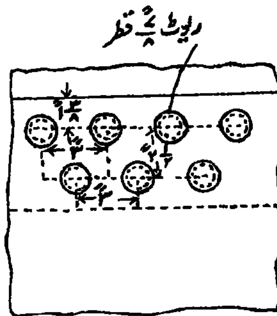
= ۲۴ × ۲π/۴ × (۷/۸)² .... (۲)

= ۲۸ء۹ ٹن

اگر یہ مساوی ہوں تو ۱۵ (گ ـ ۷/۸) = ۲۸ء۹

∴ گ = ۲۸ء۹/۱۵ + ۷/۸

= ۱ء۹۳ + ۸۷ء = ۲ء۸۰ یا کہو ۳ انچ





شکل ۴۷

۲۸ء۹ ٹن کی قوت سے مسندی زور یہ ہوگا:—

۲۸ء۹ / (۲ × ۱/۲ × ۷/۸) = ۳۳ ٹن فی مربع انچ

کیونکہ ایک ریوٹ کا مسندی رقبہ = $\frac{7}{8} \times \frac{1}{2}$ = ٫۴۳۷ مربع انچ
یہ ۳۴ ٹن فی مربع انچ کے جائز زور سے کم ہے اس لیے معلوم ہوا کہ ریوٹ کا قطر اس سے بڑا لینے سے کفایت ہوگی لیکن عملاً اکثر صورتوں میں $\frac{7}{8}$ انچ کا قطر زیادہ موزوں ہے۔

جوڑ کی استعداد اس صورت میں حسب ذیل ہوگی :-

$$\frac{۲۸٫۶۹}{\frac{1}{2} \times ۳ \times ۳۰} = \frac{۲۸٫۶۹}{۴۵} = ۶۴٫۲ \quad \text{فی صد}$$

جوڑ شکل $\frac{۷}{۴}$ کے مطابق ہوگا۔

(۳) ایک پُل کی فولادی تختی کی بندھن سلاخ پر صرف مُردہ بوجھ کی وجہ سے ۱۶ ٹن کا تناؤ پڑتا ہے اور زندہ بوجھ کی وجہ سے زور ۳۶ ٹن کے تناؤ سے ۱۰ ٹن کے فشار تک بدلتا ہے۔ بندھن سلاخ کی موٹائی $\frac{۳}{۴}$ انچ ہے اور اس کو ایک گرڈر کی جانبی تختی سے ایک $\frac{۳}{۴}$ انچ کلی تختی اور دوہرے ڈھکنے کے الصاقی جوڑ کے ذریعے جوڑتا ہے۔ موزوں کامی زور انتخاب کرو اور ریوٹوں کو اس طرح ترتیب دے کر کہ بندھن سلاخ صرف ایک ریوٹ کی تراش کے بقدر کم زور ہو جوڑ کو ترتیب دو۔ (بی۔ ایس سی۔ لندن)

اس صورت میں اعظم بوجھ = ۳۶ + ۱۶ = ۵۲ ٹن اور اقل بوجھ = ۱۶ - ۱۰ = ۶ ٹن

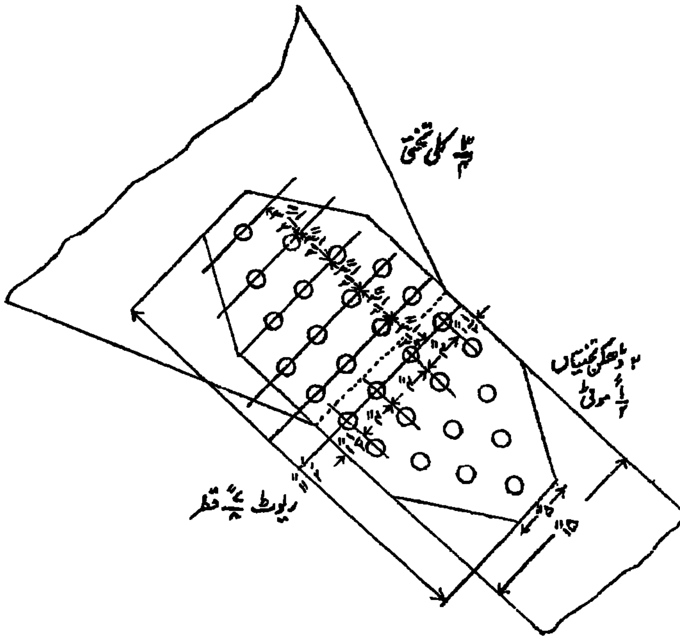
لون ھارٹ ویراش[1] کا ضابطہ استعمال کرنے سے :

---

[1] Launhardt-Weyrauch

$$\text{کامی زور} = \frac{\text{ز}}{۱٫۵}\left(۱ + \frac{\text{اقل زور}}{۲ \times \text{اعظم زور}}\right)$$

$$= \frac{\text{ز}}{۱٫۵}\left(۱ + \frac{۶}{۱۰۴}\right) = ٫۷۰۵ \text{ ز}$$



شکل ۴۸

اِس سے تنشی زور ۴٫۹۳ یا کہو ۵ ٹن فی مربع انچ جزی زور ۳٫۵۲ یا کہو ۳٫۵ ٹن فی مربع انچ، اور مسندی زور ۷ ٹن فی مربع انچ حاصل ہوتا ہے۔
اَنون کے ضابطے سے ق = $۱٫۲\sqrt{٫۷۵}$ = ۱٫۰۴ انچ لیکن عملی وجوہ سے عموماً ⅞ انچ اختیار کیا جائیگا۔
اب ہم کو بندھن سلاخ کا ضروری عرض معلوم کرنا ہے۔ فرض کرو کہ یہ ض ہے۔

تب (ض - ۷/۸) × ۳/۴ معادل تراشی رقبہ ہوگا۔

∴ (ض - ۷/۸) × ۳/۴ × ۵ کو ۵۲ ٹن کے اعظم تناؤ کے مساوی ہونا چاہیے۔

∴ (ض - ۷/۸) = (۴ × ۵۲)/(۵ × ۳) = ۱۳٫۸۹

∴ ض = ۱۳٫۸۹ + ٫۸۷۵ = کہو ۱۵ انچ

ایک ریوٹ کی مضبوطی دوہرے جز میں

= ۲π/۴ × (۷/۸)^۲ × ۳٫۵ = ۴٫۲۲ ٹن

∴ جز کے لیے ریوٹوں کی مطلوبہ تعداد = ۵۲/۴٫۲۲ = ۱۲٫۳

ہم ۱۴ ریوٹ استعمال کرینگے کیونکہ ان سے بہترین ترتیب حاصل ہوتی ہے۔

مسند میں ایک ریوٹ کی مضبوطی = ۳/۴ × ۷/۸ × ۷ = ۴٫۵۸ ٹن

∴ ۱۴ ریوٹ مسند کے لیے بہت کافی ہونگے۔

اس طرح جوڑ شکل ۴۲۔۷ کی طرح ترتیب دیا جائیگا۔ اس طرح کے جوڑوں میں اس کی بہت اہمیت ہے کہ ریوٹوں کا خطِ مرکز بندھن سلاخ کے مرکزی خط پر منطبق ہونا چاہیے ورنہ سلاخ میں کھینچ خارج المرکز ہوگی۔ اس لیے اس قسم کے جوڑوں میں ریوٹوں کو ہمیشہ بندھن سلاخ کے مرکزی خط کے لحاظ سے متشاکل ترتیب دینا چاہیے۔

(۴) ایک فولادی کھم کے فاعل سے پر کھم کی لگی ہوئی کلی تخلیوں وغیرہ کے لیے ریوٹوں کی ضروری تعداد معلوم کرو۔ کھم پر بوجھ ۱۵۰ ٹن کا پڑتا ہے۔ ریوٹوں کا قطر ۷/۸ انچ سے اور

تختی کی موٹائی $\frac{1}{2}$ انچ ہے۔

یہاں جس قسم کے قاعدے کا ذکر کیا گیا ہے وہ شکل ۲۱۵ء میں دکھایا گیا ہے۔ ایسی صورتوں میں ریوٹوں کو اس طرح تجویز کرنا ہوتا ہے کہ وہ پورا بوجھ برداشت کر سکیں [اگر کلی تختیاں اور زاویے لگے ہوئے کھم کے سرے کو رندہ کر دیا گیا ہو تو عموماً اس کو کافی سمجھا جاتا ہے کہ ریوٹوں کو صرف ۶۰ فیصدی بوجھ کے لیے تجویز کیا جائے] تاکہ اگر قاعدے کی تختی پر کھم خود ٹھیک ٹھیک نہ بیٹھے تو ریوٹ بوجھ کو عمدگی کے ساتھ منتقل کر سکیں۔

ایک ریوٹ کی مضبوطی اکہرے جز میں $= \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{7}{8}\right)^2 \times 5 = 3.01$ ٹن

" " " مسند میں $= \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} \times 10 = 4.37$ ٹن

∴ ریوٹوں کی ضروری تعداد $= \frac{150}{3.01} = 50$ تقریباً

ریوٹ دار جوڑوں کے متعلق چند عملی امور

ریوٹوں کے سوراخ چھیدنا اور برمانا — اس ملک (یعنی انگلستان) میں تخصیص ناموں میں یہ لکھنے کا طریقہ بہت عام ہے کہ ریوٹوں کے سوراخ ٹھوس تختی میں برمائے جائیں۔ چھیدنے کا عمل سوراخ کے نواح میں تختی کے مادّے کو کسی قدر نقصان پہنچاتا ہوا پایا گیا ہے اس لیے عموماً اس سے منع کیا جاتا ہے۔ برمائے ہوئے سوراخوں کے مقابلے میں چھیدے ہوئے سوراخ کسی تعمیر مثلاً ایک تختی دار گرڈر کو کس حد تک کم زور کرتے ہیں اس امر کی غالباً پوری تحقیق نہیں ہوئی حالانکہ عملی نقطۂ نظر سے یہ بالکل ضروری ہے کیونکہ سوراخ برمانے میں لاگت زیادہ آتی ہے۔ حال میں صنعتی مشینوں میں اور سوراخوں کو صحیح گھائی پر بنانے کے ذرایع میں بہت کچھ اصلاح ہوئی ہے اور اگر برمانے کی لاگت کا اور اس کی وجہ سے مال کی تیاری میں جو تاخیر واقع ہوتی ہے اس کا لحاظ رکھا جائے تو ہمارا خیال ہے کہ اکثر صورتوں میں چھیدنا جائز رکھا جا سکتا ہے۔ اس مسئلے کا ایک عمدہ حل یہ ہوگا کہ سوراخوں کو مطلوبہ قطر سے $\frac{1}{8}$ تا $\frac{1}{4}$ انچ چھوٹا چھیدا جائے اور پھر اس کو مطلوبہ

قطر تک روزن کشا کیا جائے۔

اور اس ترشی ہوئی دھات کو نکال دیا جائے۔ لیکن اس میں معمولی چھیدنے کے عمل سے زیادہ لاگت آتی ہے۔ چھیدنے کے عمل سے سوراخ کے نواح میں جو کمزوری پیدا ہوتی ہے اس کی رعایت کا ایک طریقہ جسے ہم قابلِ ترجیح سمجھتے ہیں یہ ہے کہ تختی کے پھٹاؤ یا تنشی مضبوطی کا حساب کرتے وقت سوراخ کے قطر میں ۱/۸ انچ جمع کیا جائے۔ اس سے تختی کی جسامت میں بہت خفیف اضافہ ہوتا ہے اور تیاری کی لاگت میں بہت کفایت ہوتی ہے۔ البتہ اس کا خیال بہت احتیاط کے ساتھ رکھنا چاہیے کہ سوراخوں کی گھائی صحیح ہو تاکہ جب اجزا جوڑے جائیں تو سوراخ سے سوراخ اچھی طرح مل جائیں اور بہت زیادہ ترمیم کی ضرورت نہ ہو۔ اکثر جوڑوں کے ناقابلِ اطمینان ہونے کی وجہ چھیدنے کے عمل سے دھات کے کمزور ہونے سے زیادہ یہ ہوتی ہے کہ سوراخوں کے ٹھیک ٹھیک تطابق نہ ہونے کی وجہ سے ریوٹ سوراخوں کو پورا بھر نہیں دیتے۔

ریوٹ دار جوڑوں میں تختیوں کے درمیان خاصی رگڑ ہوتی ہے لیکن مضبوطی کے حسابات میں اس سے فائدہ نہیں اٹھایا جاتا۔

ریوٹوں کی گھائی اور فصل بندی —— عام طور پر یہ قید لگا دی جاتی ہے کہ ریوٹوں کی گھائی ۶ انچ سے یا سب سے پتلی تختی کی موٹائی کے ۱۶ گنے سے زیادہ نہ ہو اور اس سے غرض یہ ہے کہ تختیوں کے بیچ میں رطوبت داخل ہو کر اور زنگ پیدا کر کے تختیوں کو پھیلا نہ دے اور یہ کہ فشاری ارکان کی صورت میں مقامی خمیدگی نہ پیدا ہو۔ مجوز کو یہ یاد رہے کہ گھائی ۳ انچ یا اس سے بقدر نصف انچ کے اضعاف کے زیادہ ہونی چاہیے۔ کسروں سے احتراز کیا جائے سوائے اس صورت کے کہ یہ بالکل ضروری ہوں۔ جہاں تک کفایت اجازت دے ایک تعمیر میں ایک ہی گھائی اختیار کرنی چاہیے اور اکثر صورتوں میں گرڈروں وغیرہ کے کاموں میں ۴ انچ کی گھائی استعمال کرنی چاہیے سوائے ان صورتوں کے جن میں خصوصی حالات کی وجہ سے کوئی دوسری گھائی رکھنا پڑے۔ تختی دار

گرڈروں کے ریوٹوں کی ترتیب سے ہم مفصل بحث باب ۱۸ میں کرینگے کیونکہ اس صورت میں ریویٹ بالکل ان ہی طریقوں کے مطابق نہیں تجویز کیے جاتے جو کہ یہاں درج کیے گئے ہیں۔



نالیاں   I شہتیر   ٹی تراشیں   زاویے

شکل ۴۹

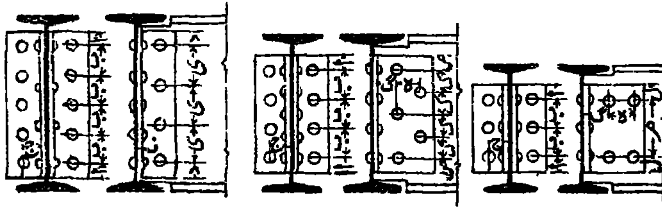
بیلی تراشوں میں ریوٹوں کی معیاری فصل بندی

۱۔ T اور ایسی ہی دوسری تراشوں میں ریوٹوں کی فصل بندی اس کے ساقہ کی جدول کے مطابق رکھی جا سکتی ہے۔ یہ جدول ریڈ پاتھ[۱]، براؤن اینڈ کمپنی لمیٹڈ[۲] کی تراشوں کی کتاب سے لی گئی ہے۔ ان تراشوں کے متعلق یہ یاد رکھنا چاہیے کہ نظریہ کی رُو سے ریوٹوں کا خط مرکز تراش کے مرکزی خط پر آنا چاہیے لیکن اکثر صورتوں میں یہ عملاً ناممکن ہے۔ جن صورتوں میں یہ تراشیں بندھن یا داب روک کے طور پر استعمال کی جائیں (خصوصاً داب روک) اُن میں یاد رہے کہ بوجھ کسی قدر خارج المرکز ہونگے اور اس طرح محسوبہ تراش سے کسی قدر بھاری تراش درکار ہوگی۔

I شہتیروں کے لیے کلیٹی رابطے — I شہتیروں کو باہم کلیٹی رابطوں کے ذریعے جوڑا جاتا ہے۔ ان رابطوں کے لیے معیاری ابعاد ساقہ کی جدول سے حاصل کیے جا سکتے ہیں جو کہ ریڈ پاتھ[۱]، براؤن اینڈ کمپنی لمیٹڈ[۲] کی دی ہوئی اطلاعات سے لی گئی ہے۔

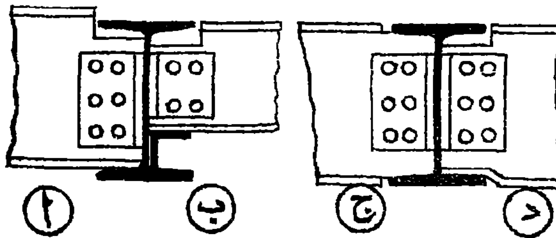
[۱] Redpath   [۲] Brown & Co., Ltd

شکل ۱۵ میں وہ مختلف طریقے دکھائے گئے ہیں جن سے شہتیروں کے سروں پر ان کلیٹی رابطوں کے لیے کٹھنے وغیرہ بنائے جا سکتے ہیں۔ (ا) میں ایک سادہ کٹھنہ چوٹی پر ہے۔ شہتیر کی نچلی کور اس شہتیر کی کور پر ٹکی ہوئی ہے جس سے اس کو جوڑنا ہے۔ (ب) میں چوٹی پر ایک سادہ کٹھنہ اور نیچے ایک زاویہ سلاخ ہے۔ (ج) میں ایک شکل دار کٹھنہ ہر ایک سرے پر ہے جو کوروں پر ٹکا ہوا ہے اور (د) میں اوپر ایک سادہ کٹھنہ اور نیچے ایک دندانہ دار جوڑ ہے۔



شکل ۱۴۔ I شہتیروں کے لیے کلیٹی رابطے

ان سب میں دندانہ دار سرا غیر ضروری طور پر گراں ہوتا ہے۔ بعض اوقات ربط کے آرائشی طریقے دیکھنے میں آتے ہیں، مثلاً کٹھنے کی شکل ایسی بنانا کہ شہتیر (ج) کی کوروں کے درمیان ٹھیک بیٹھے۔ لیکن یہ طریقے عام طور پر معمولی طریقے سے



شکل ۱۵

کچھ ایسے بہتر نہیں ثابت ہوتے اور تقریباً ہمیشہ ان میں صرفہ زیادہ ہوتا ہے۔

کیل دار رابطے ——— کیل دار رابطے اِس ملک (یعنی انگلستان) میں آج کل بہت کم استعمال ہوتے ہیں لیکن کبھی کبھی یہ ضروری ہوتے ہیں۔ جب کبھی یہ استعمال کیے جاتے ہیں ان کو بڑی حد تک ریوٹ دار جوڑوں کی طرح ہی تجویز کیا جاتا ہے یعنی جوڑ کی مضبوطیاں پھٹاؤ، جز، اور مسند میں جہاں تک ممکن ہو باہم مساوی ہونی چاہییں اور اُس سلاخ کی تنشی یا فشاری مضبوطی کے مساوی ہونی چاہئیں جس میں کیل دار جوڑ واقع ہو۔ (نیز دیکھو باب ۱۷)۔



ریوٹوں کی معیاری فصل بندی (دیکھو شکل ۴۹)

عرض	ابعاد انچوں میں										ریوٹ یا بولٹ کا اعظم قطر (انچوں میں)	
	ا	ب	ج	د	ع	ف	گ	ہ	ل	م	TDsIT	IDHL
۱ ۱/۴	۳/۴	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	۳/۸
۱ ۱/۲	۷/۸	–	–	–	–	–	–	–	۳/۴	۷/۸	۱/۴	۱/۲
۱ ۳/۴	۱	–	–	–	–	–	–	–	۷/۸	–	۱/۴	۱/۲
۲	۱ ۱/۸	–	–	–	–	–	۱ ۱/۸	۱ ۱/۸	۱ ۱/۸	۱ ۱/۸	۱/۴	۵/۸
۲ ۱/۴	۱ ۱/۴	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	۵/۸
۲ ۱/۲	۱ ۳/۸	–	–	–	–	–	۱ ۳/۸	۱ ۳/۸	۱ ۳/۸	۱ ۳/۸	۳/۸	۳/۴
۲ ۳/۴	۱ ۵/۸	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	۳/۴
۳	۱ ۳/۴	–	–	–	–	–	۱ ۱/۲	۱ ۳/۴	۱ ۱/۲	۱ ۳/۴	۱/۲	۷/۸
۳ ۱/۲	۲	–	–	–	–	–	–	–	۲	۲	۱/۲	۷/۸
۴	۲ ۱/۴	–	–	–	–	–	۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۵/۸	۷/۸
۴ ۱/۲	۲ ۱/۲	–	–	–	–	–	–	–	۲ ۱/۲	–	۳/۴	۷/۸
۵	۳	۲	۱ ۳/۴	–	–	–	۲ ۳/۴	–	۲ ۳/۴	–	۳/۴	–
۵ ۱/۲	۳ ۱/۴	۲ ۱/۴	۲	–	–	–	–	–	۳ ۱/۴	–	۳/۴	–
۶	۳ ۱/۲	۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	–	–	–	۳ ۱/۲	۳ ۱/۲	۳ ۱/۲	–	۷/۸	–
۶ ۱/۲	۳ ۳/۴	۲ ۱/۲	۲ ۱/۲	–	–	–	–	–	۳ ۳/۴	–	۷/۸	–
۷	۴	۲ ۱/۲	۳	–	–	–	–	–	۴	–	۷/۸	–
۷ ۱/۲	–	–	–	–	–	–	–	–	۴ ۱/۲	–	۷/۸	–
۸	۴ ۱/۲	۳	۳	۲ ۱/۲	۲	۲	–	–	۴ ۳/۴	–	۷/۸	–
۹	۵	۳	۴	۳	۲	۲	–	–	–	–	–	–
۱۰	۵ ۱/۲	۳	۵	۳	۲ ۱/۲	۲ ۱/۲	–	–	–	–	–	–

فولادی ریوٹوں کی کامی مضبوطی

ریوٹوں کا قطر انچوں میں	رقبہ مربع انچ	اکہرے جز میں مضبوطی ۵ ٹن فی مربع انچ سے	مستندی مضبوطی ۱۰ ٹن فی مربع انچ سے — تختی کی موٹائی انچوں میں: ۵/۱۶	۳/۸	۷/۱۶	۱/۲	۹/۱۶	۵/۸	۱۱/۱۶	۳/۴
۳/۸	٫۱۱۰۴	٫۵۵	۱٫۱۷	۱٫۴۰	۱٫۶۴	۱٫۸۷	۲٫۱۱	۲٫۳۴	۲٫۵۹	۲٫۸۱
۱/۲	٫۱۹۶۳	٫۹۸	۱٫۵۶	۱٫۸۷	۲٫۱۸	۲٫۵۰	۲٫۸۱	۳٫۱۲	۳٫۴۳	۳٫۷۵
۵/۸	٫۳۰۶۸	۱٫۵۳	۱٫۹۵	۲٫۳۴	۲٫۷۲	۳٫۱۲	۳٫۵۱	۳٫۹۰	۴٫۳۰	۴٫۶۸
۳/۴	٫۴۴۱۸	۲٫۲۱	۲٫۳۴	۲٫۸۱	۳٫۲۷	۳٫۷۵	۴٫۲۱	۴٫۶۹	۵٫۱۶	۵٫۶۳
۷/۸	٫۶۰۳۱	۳٫۰۱	۲٫۷۲	۳٫۲۸	۳٫۸۲	۴٫۳۷	۴٫۹۱	۵٫۴۶	۶٫۰۲	۶٫۵۶
۱	٫۷۸۵۴	۳٫۹۳	۳٫۱۲	۳٫۷۵	۴٫۳۷	۵٫۰۰	۵٫۶۲	۶٫۲۵	۶٫۸۷	۷٫۵۰

۱ شہتیروں کے لیے کلیٹی رابطے (دیکھو شکل ۵۰)

شہتیر (انچ)	زاویوں کا ناپ (انچ)	بولٹوں اور ریوٹوں کا قطر	زاویہ کا طول	کڑی میں ریوٹوں کی تعداد	ہر ایک نمایاں ٹانگ میں ریوٹوں کی تعداد	ابعاد (انچ) ا	ب	ج	د	ع	ف	گ	ہ	ر	س	ل	م	بے خطر بوجھ (ٹن)
۹۰×۷½×۲۴	۴×۴	۷/۸	۱′-۶″	۶	۵	۱½	۳¾	۲¼	۱½	۳	۲¼							۳۰
۶۵×۷×۲۲	۴×۴	۷/۸	۱′-۵″	۵	۴	۱½	۵	۲¼	۱½	۳¾	۲¼							۲۴
۶۵×۶½×۲۰	۴×۴	۷/۸	۱′-۳″	۵	۴	۱½	۴	۲¼	۱½	۳	۲¼							۲۱½
۸۰×۸×۱۸	۴×۶	۷/۸	۱′-۲″	۶	۵	۱¾	۲⅝	۲¼				۲¼	۲¼			۲	۵	۲۸½
۵۵×۶×۱۸	۴×۴	۳/۴	۱′-۳″	۵	۴	۱½	۴	۲¼	۱½	۳	۲¼							۱۷
۷۵×۸×۱۶	۴×۶	۷/۸	۱′-۰″	۶	۴	۱½	۳	۲¼				۲¼	۲¼			۱½	۴½	۲۶
۵۰×۶×۱۶	۳½×۶	۳/۴	۱′-۲″	۵	۴	۱½	۳	۲				۲¼	۲¼	۱½	۲¼			۱۶½

۱۵×۶×۳۵	۳ ۱/۲×۶	۳/۴	۱۱″	۵	۴	۱ ۱/۲	۳	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۲ ۱/۴			۱۵ ۱/۲
۱۴×۸×۷۰	۴×۶	۷/۸	۱۰ ۱/۲″	۵	۴	۱ ۳/۸	۲ ۱/۲	۲ ۱/۴				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۳/۸	۱ ۷/۸			۲۲
۱۴×۵ ۱/۲×۴۰	۳ ۱/۲×۶	۳/۴	۱۱″	۵	۳	۱ ۱/۴	۴	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۲			۱۴ ۱/۲
۱۳×۵×۲۵	۳ ۱/۲×۶	۳/۴	۹″	۴	۳	۱ ۱/۲	۳	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴			۱ ۱/۲	۶	۱۱ ۱/۲
۱۲×۸×۶۵	۴×۶	۷/۸	۸″	۵	۳	۱ ۱/۲	۲ ۱/۲	۲ ۱/۴				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۱ ۱/۴			۱۹ ۱/۲
۱۲×۵×۳۰	۳ ۱/۲×۶	۳/۴	۹″	۴	۳	۱ ۱/۲	۳	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴			۱ ۱/۲	۶	۱۰ ۱/۲
۱۰×۸×۵۵	۴×۶	۷/۸	۵ ۱/۲″	۳	۲	۱ ۳/۸	۲ ۳/۴	۲ ۱/۴				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۳/۸	۱ ۳/۸			۱۱ ۱/۲
۱۰×۶×۴۰	۳ ۱/۲×۶	۳/۴	۷″	۵	۳	۱ ۱/۴	۲ ۱/۲	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۱/۲	۱ ۱/۸			۱۴ ۱/۲
۱۰×۴ ۱/۲×۲۵	۳ ۱/۲×۶	۳/۴	۷″	۴	۲	۱ ۱/۴	۴ ۱/۲	۲				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴			۱ ۱/۴	۴ ۱/۲	۹ ۱/۲
۹×۷×۵۰	۴×۶	۷/۸	۵ ۱/۲″	۳	۲	۱ ۳/۸	۲ ۳/۴	۲ ۱/۴				۲ ۱/۴	۲ ۱/۴	۱ ۳/۸	۱ ۳/۸			۱۱ ۱/۲
۹×۴×۲۱	۳ ۱/۲×۲ ۱/۲	۳/۴	۷″	۳	۲	۱ ۱/۴	۴ ۱/۲	۲	۱ ۱/۴	۲ ۱/۴	۲							۷

۲	۲	۳	[illegible]	۳	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
								[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲
								[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
—	—	—	—	—	—	—	—	۲	۲	۲
۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۳	۳	۲
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

پانچواں باب

شہتیروں میں خماؤ کے معیار اور جزی قوتیں

تعریفات ــــــ کسی شہتیر کے فصل کے کسی نقطے پر جزی قوت اُن تمام عمودی قوتوں کا جبری حاصل جمع ہے جو شہتیر پر اُس نقطے کے دائیں یا بائیں طرف عمل کریں۔

شہتیر کے فصل کے کسی نقطے پر خماؤ کا معیار اُن تمام قوتوں کے اِس نقطے کے گرد کے معیاروں کا جبری حاصل جمع ہے جو اِس نقطے کے دائیں یا بائیں طرف عمل کریں۔

چونکہ شہتیر اس پر عمل کرنے والی قوتوں کے تحت تعادل میں ہے اِس لیے کسی نقطے کے دونوں طرف کی قوتوں کا جبری حاصل جمع اور اس کے گرد اِن کے معیاروں کا جبری حاصل جمع صفر ہوگا۔ اِس طرح دونوں جانبوں میں سے کوئی سی جانب لی جائے تو اِس طرف غور کرنے سے جزی قوت اور خماؤ کے معیار وہی حاصل ہونگے البتہ علامت میں اُن کے مخالف ہونگے جو دوسری جانب پر غور کرنے سے حاصل ہوں۔ ہم جہاں تک ممکن ہو جزی قوت اور خماؤ کے معیار ہمیشہ دائیں جانب کی قوتوں سے حاصل کرینگے اور جزی قوت کو اوپر وار اور خماؤ کے معیار کو مخالف سمتِ ساعت ہونے پر مثبت

سمجھینگے- بچوار قوت اور موافق سمت ساعت معیار منفی ہونگے۔

خماؤ کے معیار اور جزی قوت کے نقشے ــــــ اگر فصل کے ہر نقطے پر کی جزی قوت اور خماؤ کا معیار فصل کو اساس مان کر ترسیم کیے جائیں اور اس طرح حاصل ہونے والے نقاط میں سے منحنی گزارے جائیں تو دو نقشے حاصل ہونگے جو جزی قوت اور خماؤ کے معیار کے نقشے کہلاتے ہیں۔ ان نقشوں سے فصل کے کسی نقطے پر ان کی قیمتیں پڑھ لی جاسکتی ہیں۔ ہم لداؤ کی مختلف قسموں اور شہتیر کے سہاروں کے مختلف طوروں کے لیے ان نقشوں کی شکلوں پر غور کرینگے اور پہلے ساکن بوجھوں سے بحث کرینگے۔ کسی نقطہ ط کے لیے جزی قوت $ق_ط$ سے اور خماؤ کا معیار $م_ط$ سے تعبیر کیا جائیگا۔

خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے ساکن بوجھوں کے تحت

(۱) برآمدہ بیرم ــــــ یعنی ایسے شہتیر جو ایک سرے پر ثابت اور دوسرے پر آزاد ہوں اور تمام بوجھ شہتیر کے طول کے علی القوائم ہوں

صورت ۱- برآمدہ بیرم پر ایک منفرد بوجھ ــــ فرض کرو کہ ایک برآمدہ بیرم کے، جو سرے ب پر ثابت ہے (شکل ۵۲ء) نقطہ ا پر، جو ب سے فاصلہ ل پر ہے، ایک منفرد بوجھ و ہے۔ ا سے فاصلہ لا پر کسی نقطہ ط پر غور کرو۔

تب $ق_ط = و$

یہ سارے فصل میں مستقل ہے۔

∴ جز کا نقشہ ایک مستطیل ہوگا جس کا ارتفاع و ہوگا۔

اور $م_ط = و \times لا$

یہ لا کے متناسب ہے:-

∴ خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مثلث ہوگا جس کا اعظم معین و ل ہے

جو نقطہ ب پر خماؤ کا معیار ہے۔

صورت ۲۔ برآمدہ بیرام پر دو منفرد بوجھ۔ چونکہ کسی نقطے پر خماؤ کے معیار اور جزی قوت کی تعریف یہ ہے کہ یہ اس نقطے کے بائیں طرف کے معیاروں اور قوتوں کے حاصل جمع ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک سے زیادہ بوجھوں کے لیے خماؤ کے معیار اور جزی قوت کے نقشے علیحدہ بوجھوں کے نقشوں کو جمع کرنے سے حاصل ہونگے۔ موجودہ صورت میں جس میں بوجھ و۱ اور و۲ ثابت سرے سے فاصلوں ل۱ اور ل۲ پر عمل کرتے ہیں نقشے اس طرح حاصل ہونگے کہ علیحدہ نقشوں کو جمع کیا جائے جس طرح کہ شکل ۵۲ (۲) میں دکھایا گیا ہے۔

صورت ۳۔ برآمدہ بیرام پر یکساں بوجھ۔ فرض کرو کہ فصل ل کے ایک برآمدہ بیرم اب پر و ٹن فی طولی فٹ کا ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ ہے۔ آزاد سرے ا سے فاصلہ لا پر ایک نقطہ ط پر غور کرو۔ تب

$$ق_ط = \text{اط پر کا بوجھ}$$
$$= و لا$$

یہ لا کے متناسب ہے اس لیے جز کا نقشہ ایک مثلث ہوگا اور اعظم جز سرے ب پر ہوگا اور و ل یا و کے مساوی ہوگا جہاں و برآمدہ بیرم پر کا مجموعی بوجھ ہے۔

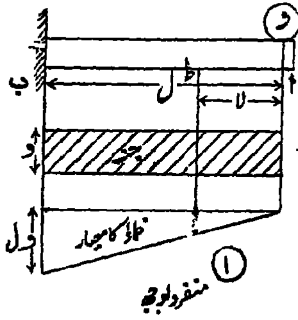
$$م_ط = \text{بوجھ و لا کا معیار ط کے گرد}$$
$$= و لا \times \frac{لا}{۲}$$
$$= \frac{و لا^۲}{۲}$$

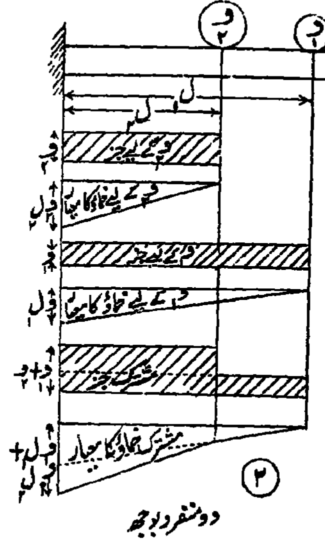
یہ لا۲ کے متناسب ہے اس لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا جس کا راس ا پر ہوگا۔ اعظم خماؤ کا معیار $\frac{و ل^۲}{۲}$ یا $\frac{و ل}{۲}$ ہوگا اور ب پر واقع ہوگا۔

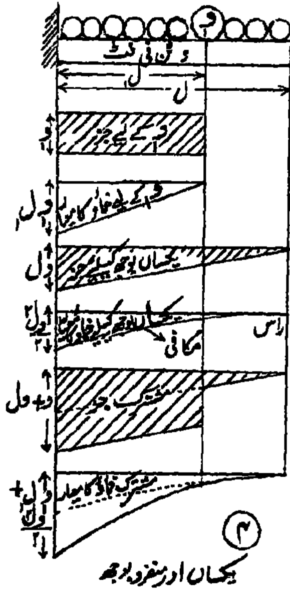
صورت ۴۔ برآمدہ بیرام پر منفرد بوجھ اور یکساں بوجھ۔

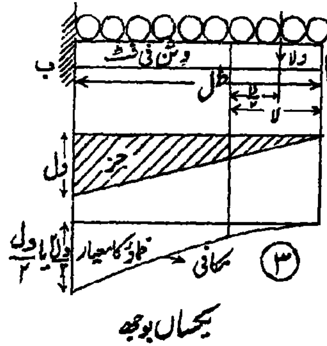
اِس صورت میں، صورت ۲ کی طرح، جز اور خماؤ کے معیار کے نقشے اِس طرح حاصل ہونگے کہ علٰحدہ نقشے صورت ۱ اور ۲ کے لیے کھینچے جائیں اور ان کو جمع کیا جائے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

صورت ۵۔ برآمدہ بیرم پر یکساں طور پر بڑھتا ہوا بوجھ۔









شکل ۵۲

برآمدہ بیرموں کے لیے خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے

فرض کرو کہ ایک برآمدہ بیرم ا ب پر ایک ایسا بوجھ ہے جس کی حدت آزاد سرے ا سے ثابت سرے ب تک یکساں طور پر بڑھتی ہے (شکل ۵۲)۔ اس کی عملی مثال کسی تالاب یا ٹانکی کی دیوار ہے جس پر پانی کا دباؤ عمل کرے۔
فرض کرو کہ ا سے اکائی فاصلے پر بوجھ کی حدت و ٹن فی طولی فٹ ہے۔ تب ا سے فاصلہ لا پر کسی نقطہ ط پر بوجھ کی حدت و لا ہوگی۔ ب پر بوجھ کی حدت و ل ہوگی اور کل بوجھ

$$= د = \frac{و ل}{۲} \times ل = \frac{و ل^{۲}}{۲}$$

$$ق_{ط} = \text{ط کے بائیں طرف کل بوجھ}$$

$$= و لا \times \frac{لا}{۲} = \frac{و لا^{۲}}{۲}$$

∴ جز کا نقشہ ایک مکافی ہوگا جس کا راس ا ہوگا۔ اعظم جز ب پر ہوگا اور د کے مساوی ہوگا۔

$$ھ_{ط} = \text{ط کے بائیں طرف کے بوجھ کا معیار}$$

$$= \frac{و لا^{۲}}{۲} \times \frac{لا}{۳} = \frac{و لا^{۳}}{۶}$$

∴ خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک منحنی ہے جس کے معیّن لا^{۳} کی طرح بدلتے ہیں۔ اس طرح کا منحنی تیسرے رتبے کا مکافی کہلاتا ہے۔

اعظم خماؤ کا معیار جو ب پر ہے $= \frac{و ل^{۳}}{۶} = \frac{د ل}{۳}$

نقشے شکل ۵۳ کے مطابق ہونگے۔

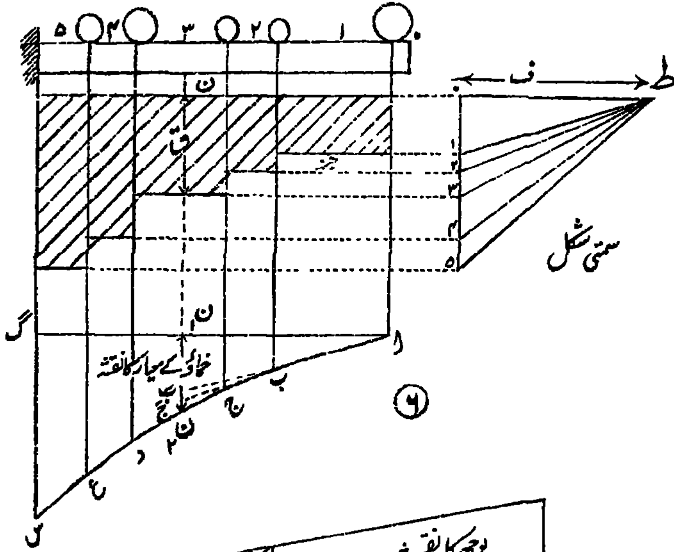
صورت ۷۔ برآمدہ بیرم پر بے قاعدہ بوجھ۔ ترسیمی طریقہ

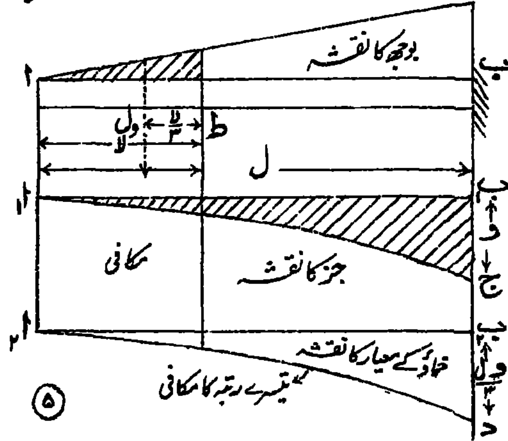
فرض کرو کہ ایک برآمدہ بیرم پر چند بوجھ (۰، ۱) (۱، ۲) وغیرہ (شکل ۵۳) عمل کرتے ہیں۔ جز اور خماؤ کے معیار کے نقشے حاصل کرنے کے لیے ایک سمتی خط (۰، ۵) کھینچو جو ان قوتوں کو کسی مناسب پیمانے پر تعبیر کرے اور اس خط سے کسی مناسب فاصلہ ف پر ایک قطب ط لو اور سمتی خط پر کے ۰ سے ۵ تک ہر نقطے کو ط سے ملاؤ۔

اب قوتوں کے خطوط کو قطع کرتے ہوئے حسب ذیل خطوط کھینچو۔ ط کے

متوازی ا گ اور رقبہ ۱ میں ط ا کے متوازی ا ب۔ رقبہ ۲ میں ط ۲ کے متوازی ب ج اور اسی طرح یہاں تک کہ نقطہ س حاصل ہو۔

تب ا ب ج د ع س گ خماؤ کے معیار کا نقشہ ہوگا۔





شکل ۵۳ع۔ برآمدہ بیرم کے لیے خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے

(گزشتہ سلسلہ)

جز کا نقشہ حاصل کرنے کے لیے سمتی خط پر کے نقاط ۱ تا ۵ میں سے ان کے متناظر رقبوں میں اُفقی خط کھینچو۔ نقطہ ۰ میں کا خط پورے فصل میں کھینچا جائے۔ اِس طرح جو زینہ نما شکل حاصل ہوگی وہ جز کا نقشہ ہوگی۔

ثبوت۔ فصل کے کسی نقطہ ن پر غور کرو اور ا ب اور ب ج کو خارج ہوکر ریسمانی کثیر الاضلاع کے معین ن۱ ن۲ کو جو نقطہ ن کے لیے ہے نقاط بَ اور جَ پر ملنے دو۔

اب مثلثات ون۱بَ اور ط ۰ ۱ پر غور کرو۔

یہ مشابہ ہیں اور چونکہ مشابہ مثلثوں کے قاعدے ارتفاعوں کے تناسب میں ہونگے اِس لیے

$$\frac{ن_۱ بَ}{۱،۰} = \frac{ا ن_۱}{ف}$$

∴ ف × ن۱بَ = ۱،۰ × ان۱

لیکن ۱،۰ × ان۱ = قوت ۰،۱ کا معیار ط کے گرد

∴ ف × ن۱بَ = قوت ۰،۱ کا معیار ط کے گرد

اسی طرح یہ حاصل ہوتا ہے کہ

ف × بَ جَ = قوت ۱،۲ کا معیار ن کے گرد

اور ف × جَ ن۲ = قوت ۲،۳ کا معیار ن کے گرد

∴ حاصل ہوا کہ ف × ن۱ن۲ = ف (ن۱بَ + بَ جَ + جَ ن۲)

= ن کے دائیں طرف کی تمام قوتوں کا معیار ن کے گرد۔

= مَن

اور چونکہ ف ایک مستقل مقدار ہے اس لیے معلوم ہوا کہ ریسمانی کثیر الاضلاع کے معین شہتیر میں اپنے متناظر نقاط پر خماؤ کے معیار کو تعبیر کرتے ہیں۔

اب ن پر کے جز ق پر غور کرو۔ ن کے دائیں طرف کی مجموعی قوت

= ۰،۱ + ۱،۲ + ۲،۳ = ۳،۰ اور صریحاً یہی قیمت جز کے نقشے میں
حاصل ہوئی ہے۔

پیمانے — تمام ترسیمی عملوں میں یہ بے حد ضروری ہے کہ مختلف مقداریں کس پیمانے پر کھینچی گئی ہیں صراحت کے ساتھ بیان کیا جائے اور اس کا خیال رکھا جائے کہ یہ پیمانے ان مقداروں کو پڑھنے میں سہولت بخش ہوں۔

فرض کرو کہ مکانی نقشے کا پیمانہ ۱ انچ = لا فٹ ہے اور سمتی خط پر بوجھ کا پیمانہ ۱ انچ = ما ٹن ہے۔ اور قطبی فاصلہ نقشے میں ف حقیقی انچ ہے۔

تب خماؤ کے معیاروں کو رسیانی کثیر الاضلاع سے پڑھنے کے لیے پیمانہ ۱ انچ = ف × لا × ما فٹ ٹن ہوگا۔

اس لیے ف کو اس طرح انتخاب کرنا چاہیے کہ خماؤ کے معیار کا پیمانہ ایک سہولت بخش بے کسر عدد ہو۔

عددی مثال کے طور پر فرض کرو کہ مکانی پیمانہ ۱ انچ = ۴ فٹ ہے اور بوجھ کا پیمانہ ۱ انچ = ۲ ٹن ہے، تب اگر ف = ۲½ انچ لیا گیا تو خماؤ کے معیار کا پیمانہ ۱ انچ = ۴ × ۲ × ۲½ = ۲۰ فٹ ٹن ہوگا۔

اگر ف = ۲ انچ لیا جاتا تو خماؤ کے معیار کا پیمانہ ۱ انچ = ۱۶ فٹ ٹن ہوتا جو اتنا سہولت بخش نہ ہوتا۔

ب۔ سادہ طور پر سہارے ہوئے شہتیر — یعنی شہتیر

جو دو سہاروں پر صرف ٹکے ہوئے ہوں اور سارا دباؤ شہتیر کے طول کے علی القوائم ہو۔ سہارے ہمیشہ شہتیر کے سروں پر فرض کیے جائینگے سوائے اس صورت کے کہ اس کے خلاف صراحت کی گئی ہو۔

سادہ طور پر سہارے ہوئے شہتیروں میں عمل کرنے والی قوتیں بوجھ اور سہاروں کے ردِ عمل ہیں۔ ردِ عملوں کا حاصل جمع مجموعی بوجھ کے مساوی ہوگا اور ردِ عملوں کی قیمت معیاروں کے ذریعے حاصل ہوگی جس کا طریقہ باب ۲ میں سمجھایا گیا ہے۔ سرے چونکہ آزادانہ سہارے ہوئے ہیں اس لیے

دونوں سروں پر کوئی خماؤ کا معیار نہ ہوگا۔

ہم ذیل کی معیاری صورتوں پر غور کرینگے :-

صورت ۱- منفرد بوجھ کسی مقام پر --- فرض کرو کہ ایک بوجھ و فصل ل کے ایک شہتیر ا ب کے ایک نقطہ ج پر رکھا گیا ہے جس کے فاصلے ا اور ب سے علی الترتیب ا اور ب ہیں۔

ب پر کا ردِّ عمل $ر_ب$ معلوم کرنے کے لیے ا کے گرد معیار لو۔

تب $ر_ب \times ل = و \times ا$

$$ر_ب = \frac{و \times ا}{ل}$$

اسی طرح $$ر_ا = \frac{و \times ب}{ل}$$

اب ب اور ج کے درمیان کسی نقطہ ط پر غور کرو۔

$$ق_ط = ر_ب = + \frac{و ا}{ل}$$

∴ ب اور ج کے درمیان جز کا نقشہ ایک مستطیل ہوگا جس کا ارتفاع = $\frac{و ا}{ل}$

اب ج اور ا کے درمیان کوئی نقطہ طَ لو۔

$$ق_{طَ} = ر_ب - و$$

$$= \frac{و ا}{ل} - و = و\left(\frac{ا - ل}{ل}\right) = -\frac{و ب}{ل} = -ر_ا$$

∴ ج اور ا کے درمیان جز کا نقشہ ایک مستطیل ہوگا جس کا ارتفاع $= -\frac{و ب}{ل}$

برآمدہ بیرم کی صورت میں مثبت اور منفی جز کے درمیان تمیز کرنے کی ضرورت نہیں ہوئی کیونکہ جز کی سمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوئی لیکن

موجودہ صورت میں سمت میں تبدیلی ہوئی ہے۔ اس لیے ہم صفحہ ۱۴۰ پر دیا ہوا قاعدہ استعمال کرینگے۔

$$ھ_ط = س_ب \times لا = \frac{و \times ا \times لا}{ل}$$

یہ لا کے تناسب ہے۔ اس لیے ب اور ج کے درمیان خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مثلث ہوگا اور ج پر خماؤ کا معیار $\frac{و ا ب}{ل}$ ہوگا۔ اگر ط اِس کی بجائے ج اور ا کے درمیان ہوتا اور ا سے فاصلہ لاَ پر ہوتا تو

$$ھ_ط = س_ب (ل - لاَ) - و (ل - لاَ - ب)$$
$$= س_ب ل - س_ب لاَ - و ل + و لاَ + و ب$$
$$= لاَ (و - س_ب) + و ب - ل (و - س_ب)$$
$$= س_ا لاَ + و ب - ل س_ا$$
$$= \frac{و ب لاَ}{ل} + و ب - و ب$$
$$= \frac{و ب لاَ}{ل}$$

یہ لاَ کے تناسب ہے۔ اِس لیے ا اور ج کے درمیان بھی خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مثلث ہوگا اور پورا نقشہ شکل کے مطابق ہوگا۔

صورت ۲۔ مرکز پر منفرد بوجھ — یہ گزشتہ صورت کی ایک خاص شکل ہے جس میں $ا = ب = \frac{ل}{۲}$

اب ہر ایک ردِّ عمل $\frac{و}{۲}$ ہوگا اور اعظم خماؤ کا معیار

$$= \frac{و \times \frac{ل}{۲} \times \frac{ل}{۲}}{ل} = \frac{و ل}{۴}$$

صورت ۳۔ پورے فصل پر یکساں بوجھ —— فرض کرو کہ پورے فصل اب پر ایک یکساں بوجھ و ٹن فی طولی فٹ کا چھایا ہوا ہے اور ب سے فاصلہ لا پر ایک نقطہ ج پر غور کرو۔

اس صورت میں دونوں ردِ عمل تشاکل کی وجہ سے مساوی ہونگے

(۱) منفرد بوجھ

(۲) مرکز پر منفرد بوجھ

(۳) پورے فصل پر یکساں بوجھ

(۴) فصل کے ایک حصہ پر یکساں بوجھ

شکل ۵۴ ۔ سادہ طور پر سہارے ہوئے شہتیر

اور ہر ایک $\frac{و ل}{۲}$ یا $\frac{و}{۲}$ ہوگا۔

$$تب\ ق_{ج} = ر_{ب} - و\ لا = و\left(\frac{ل}{۲} - لا\right)$$

یہ ایک خطی ربط ہے اس لیے جز کا نقشہ ایک مثلث ہوگا جیسا کہ دکھایا گیا ہے اور اس کی قیمتیں سروں پر $\pm \frac{و ل}{۲}$ ہونگی اور مرکز پر علامت بدلیگی۔

اب خماؤ کے معیار پر غور کرو۔

$$م_{ج} = ر_{ب} \times لا - و\ لا \times \frac{لا}{۲}$$

$$= \frac{و\ ل\ لا}{۲} - \frac{و\ لا^{۲}}{۲} = \frac{و}{۲}(ل\ لا - لا^{۲})$$

یہ $لا^{۲}$ پر منحصر ہے، اِس لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا۔
اعظم خماؤ کا معیار مرکز پر یعنی $لا = \frac{ل}{۲}$ پر ہوگا۔

$$تب\ اعظم\ خماؤ\ کا\ معیار = \frac{و}{۲}\left\{\left(\frac{ل \times ل}{۲}\right) - \left(\frac{ل}{۲}\right)^{۲}\right\}$$

$$= \frac{و}{۲}\left\{\frac{ل^{۲}}{۲} - \frac{ل^{۲}}{۴}\right\} = \frac{و}{۲} \times \frac{ل^{۲}}{۴}$$

$$= \frac{و ل^{۲}}{۸}\ یا\ \frac{و ل}{۸}$$

صورت ۴۔ فصل کے ایک حصے پر یکساں بوجھ — فرض کرو کہ و ٹن فی طولی فٹ کا ایک یکساں بوجھ جس کا طول ع د = لہ ہے فصل ل کے شہتیر ا ب پر رکھا جاتا ہے اور فرض کرو کہ بوجھ کا مرکز ج سروں ا اور ب سے فاصلوں $ل_{۱}$ اور ب پر ہے۔

تب اگر مجموعی بوجھ و لہ = و

$$تو\quad ر_{ب} = \frac{و\ ا}{ل}\ اور\ ر_{ا} = \frac{و\ ب}{ل}$$

ب اور د کے درمیان جز مستقل ہوگا اور $\frac{\text{و ا}}{\text{ل}}$ ہوگا۔ د اور ع کے درمیان جز یکساں طور پر گھٹیگا یہاں تک کہ ع پر جز

$$= \text{م}_{\text{ب}} - \text{و} = \frac{\text{و ا}}{\text{ل}} - \text{و} = - \frac{\text{و ب}}{\text{ل}} = - \text{م}_{\text{ا}}$$

ع اور ا کے درمیان جز مستقل ہوگا اور $- \frac{\text{و ب}}{\text{ل}}$ ہوگا۔ اِس طرح جز کا نقشہ وہ حاصل ہوگا جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

نقطہ ک جس پر جز صفر ہے اِس طرح معلوم ہوسکتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ بوجھ کے مرکز ج سے فاصلہ لا پر ہے

$$\text{تب} \quad \text{ق}_{\text{ی}} = \text{م}_{\text{ب}} - \text{و} \left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{لا} \right) = ۰$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{و ا}}{\text{ل}} - \frac{\text{و ل}}{۲} + \text{و لا} = ۰$$

$$\text{و لا} = \frac{\text{و ل}}{۲} - \frac{\text{و ا}}{\text{ل}} = \frac{\text{و ل}}{۲} - \frac{\text{و ل ا}}{\text{ل}}$$

$$\therefore \quad \text{لا} = \frac{\text{ل}}{۲} - \frac{\text{ا ل}}{\text{ل}} = \text{ل} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{\text{ا}}{\text{ل}} \right)$$

خماؤ کے معیار کا نقشہ اِس طرح کھینچا جا سکتا ہے کہ قاعدہ $\text{ا}_{۲}\text{ب}_{۲}$ پر ایک طول $\text{ج}_{۲}$گ مساوی $\frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}}$ کے، یعنی اُس خماؤ کے معیار کے کھینچا جائے جو سارے بوجھ کے ج پر مرتکز ہونے کی صورت میں ج پر ہو۔

اب گ کو $\text{ا}_{۲}$ سے اور $\text{ب}_{۲}$ سے ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ملانے والے خطوط ع اور د میں کے انتصابی خطوط کو ک اور م پر قطع کرتے ہیں۔

ک م کو ملاؤ جو $\text{ج}_{۲}$گ کو جہ پر قطع کرے اور جہ گ کی تنصیف ف پر کرو۔ ک، ف، اور م میں سے ایک مکافی ک س ف ن م کھینچو۔ تب مکمل خماؤ کے معیار کا نقشہ $\text{ا}_{۲}$ ک ف م $\text{ب}_{۲}$ ہوگا۔

اِس کو ثابت کرنے کے لیے $\text{ع}_{۲}$ سے فاصلہ لا پر کسی نقطہ ی پر کے خماؤ کے معیار پر غور کرو۔ یہ فاصلہ لا ایسا ہو کہ ی لدے ہوئے حصے کے اندر واقع ہو۔

$$\text{تب}\quad \text{م}_{\text{ی}} = \text{ر}_{\text{ا}} \times \text{ا}_{\text{ی}} - \frac{\text{و}}{\text{ل}} \times \text{لا} \times \frac{\text{لا}}{۲}$$

$$= \frac{\text{و ب}}{\text{ل}}\left(\text{ا} - \frac{\text{ل}}{۲} + \text{لا}\right) - \frac{\text{و لا}^{۲}}{۲\text{ل}} \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{اب}\quad \text{ج}_{۲}\text{گ} = \frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}}$$

$$\text{ک ع}_{۲} = \frac{\text{ج}_{۲}\text{گ} \times \text{ع}_{۲}\text{ج}_{۲}}{\text{ا}_{۲}\text{ج}_{۲}} = \frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}} \times \frac{\left(\text{ا} - \frac{\text{ل}}{۲}\right)}{\text{ا}}$$

$$= \frac{\text{و ب}}{\text{ل}}\left(\text{ا} - \frac{\text{ل}}{۲}\right) \quad \ldots\ldots (۲)$$

$$\text{م ج}_{۲} = \frac{\text{ج}_{۲}\text{گ} \times \text{م}_{۲}\text{ب}_{۲}}{\text{ب}_{۲}\text{ج}_{۲}} = \frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}} \cdot \frac{\left(\text{ب} - \frac{\text{ل}}{۲}\right)}{\text{ب}}$$

$$= \frac{\text{و ا}}{\text{ل}}\left(\text{ب} - \frac{\text{ل}}{۲}\right) \quad \ldots\ldots (۳)$$

$$\text{ج}_{۲}\text{جہ} = \frac{۱}{۲}\left(\text{ک ع}_{۲} + \text{م ج}_{۲}\right)$$

$$= \frac{\text{و}}{۲\text{ل}}\left\{\text{ب}\left(\text{ا} - \frac{\text{ل}}{۲}\right) + \text{ا}\left(\text{ب} - \frac{\text{ل}}{۲}\right)\right\}$$

$$= \frac{\text{و}}{۲\text{ل}}\left\{۲\,\text{ا ب} - \frac{\text{ل}}{۲}(\text{ا}+\text{ب})\right\} = \frac{\text{و}}{۲\text{ل}}\left\{۲\,\text{ا ب} - \frac{\text{ل ل}}{۲}\right\} \quad (۴)$$

$$\therefore\quad \text{جہ گ} = \text{ج}_{۲}\text{گ} - \text{ج}_{۲}\text{جہ}$$

$$= \frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}} - \frac{\text{و}}{۲\text{ل}}\left(۲\,\text{ا ب} - \frac{\text{ل ل}}{۲}\right)$$

$$= \frac{\text{و}}{\text{ل}}\left(\text{ا ب} - \text{ا ب} + \frac{\text{ل ل}}{۴}\right) = \frac{\text{و ل}}{۴} \quad \ldots\ldots (۵)$$

$$\therefore\quad \text{جہ ف} = \frac{۱}{۲}\,\text{جہ گ} = \frac{\text{و ل}}{۸}$$

دیکھو یہ وہی خاؤ کا معیار ہے جو بوجھ و کو اس کے طول کے مساوی فصل پر رکھنے سے پیدا ہوتا۔

اب مکانی کی خاصیت سے

$$\frac{\text{ف جہ} - \text{س ت}}{\text{ت جہ}} = \frac{\text{ت جہ}^2}{\text{ک جہ}^2} = \frac{\text{ی ج}_2^2}{\text{ع ج}_2^2} = \frac{\left(\frac{\text{لہ}}{2} - \text{لا}\right)^2}{\left(\frac{\text{لہ}}{2}\right)^2}$$

$$\therefore \quad 1 - \frac{\text{س ت}}{\text{ف جہ}} = 1 - \frac{4\,\text{لہ لا}}{\text{لہ}^2} + \frac{4\,\text{لا}^2}{\text{لہ}^2}$$

$$\therefore \quad \text{س ت} = \frac{4(\text{لہ لا} - \text{لا}^2)}{\text{لہ}^2} \times \text{ف جہ} = \frac{\text{و لا}}{2} - \frac{\text{و لا}^2}{2\,\text{لہ}} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\text{ی ت} = \text{ع}_2\text{ک} + \frac{\text{ع}_2\text{ی}}{\text{ع}_2\text{ج}_2}\left(\text{ج}_2\text{جہ} - \text{ع}_2\text{ک}\right)$$

$$= \frac{\text{و ب}}{\text{ل}}\left(1 - \frac{\text{لہ}}{2}\right) + \frac{2\,\text{لا}}{\text{لہ}}\left\{\frac{\text{و}}{2\,\text{ل}}\left(2\,\text{اب} - \frac{\text{لہ ل}}{2}\right) - \frac{\text{و ب}}{\text{ل}}\left(1 - \frac{\text{لہ}}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\text{و}}{\text{ل}}\left\{\text{اب} - \frac{\text{ب لہ}}{2} + \frac{2\,\text{اب لا}}{\text{لہ}} - \frac{\text{لا ل}}{2} - \frac{2\,\text{اب لا}}{\text{لہ}} + \text{ب لا}\right\}$$

$$\therefore \quad \text{ی س} = \text{ی ت} + \text{س ت}$$

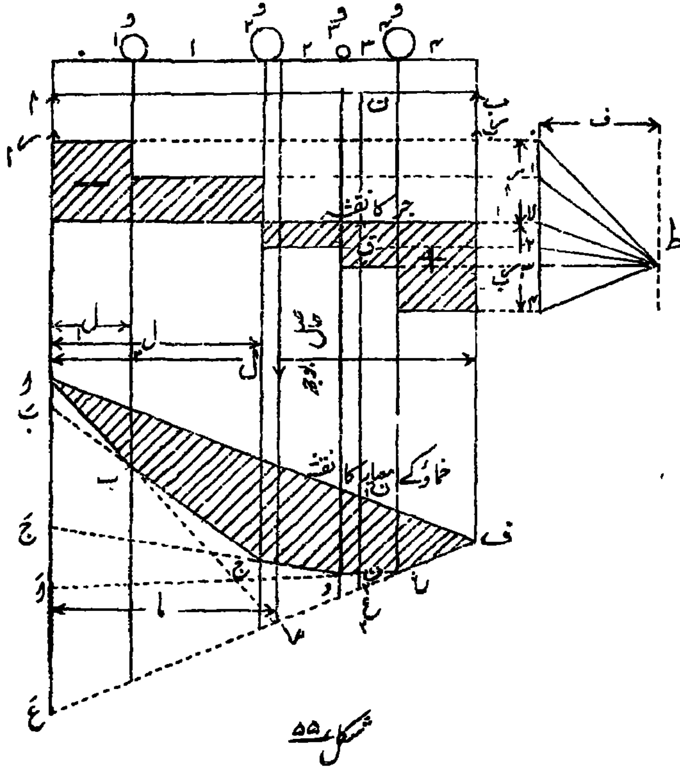
$$= \frac{\text{و ب}}{\text{ل}}\left(1 - \frac{\text{لہ}}{2} + \text{لا}\right) - \frac{\text{و لا}^2}{2\,\text{لہ}}$$

(۱) کے ساتھ اس کا مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ ی س سے دیے ہوئے نقطے پر کا خماؤ کا معیار حاصل ہوگا۔

آگے چل کر ثابت کیا جائیگا (صفحہ ۱۶۵) کہ خماؤ کا معیار فصل کے اُس نقطے پر اعظم ہوتا ہے جس پر جز صفر ہو۔ اس طرح ک ہیں کے انتصابی خط سے خماؤ کے معیار کے نقشے کا اعظم معین حاصل ہوگا۔

صورت ۵ — بے قاعدہ بوجھ۔ ترسیمی عمل — فرض کرو کہ ایک فصل اب پر چند بوجھ و_1، و_2، و_3، و_4 کہیں بھی رکھے گئے ہیں۔ بوجھوں کے

درمیان کے رقبوں پر نمبر لگاؤ اور (۰، ۱، ۲، ۳، ۴) ایک انتصابی سمتی خط کھینچو



شکل ۵۵

جز اور خماؤ کے معیار کے نقشوں کی ترسیمی ساخت

جو کسی مناسب پیمانے پر بوجھوں کو تعبیر کرے۔ اور سمتی خط سے ایک مناسب قطبی فاصلہ ف پر کسی جگہ ایک نقطہ ط لو اور اس سے نقاط ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ کو ملاؤ۔

اب رقبہ ۰ میں ا ب متوازی ط ۰ کے کھینچو۔ رقبہ ۱ میں ب ج متوازی ط ۱ کے اور علی ہذا یہاں تک کہ ع ف متوازی ط ۴ کے کھینچ جائے ا ف کو ملاؤ۔ تب شکل ا ب ج د ع ف ا بوجھوں کے دیے ہوئے

نظام کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ ہوگی۔

اب ریسمانی کثیر الاضلاع کے اختتامی ضلع ا ف کے متوازی ط لا کھینچو تو ہم' لا = م ب اور لا • = م ا

جز کا نقشہ کھینچنے کے لیے لا میں سے ایک اُفقی خط سارے فصل میں کھینچو۔ یہ جز کے نقشے کا قاعدہ ہوگا۔ اب نقطہ • میں سے رقبہ • میں اُفقی خط کھینچو، نقطہ ا میں سے رقبہ ا میں اور علیٰ ہذا۔ اس طرح جو زینہ دار نقشہ حاصل ہوگا وہ جز کا نقشہ ہوگا۔

ثبوت۔ کڑیوں ج ب، د ج، ع د، ف ع کو پیچھے کی طرف خارج کر کے ا میں کے انتصابی خط سے نقاط بَ، جَ، دَ، عَ پر ملنے دو اور فرض کرو کہ پہلی کڑی و ب خارج ہو کر آخری کڑی ع ف سے ھا پر ملتی ہے۔ تب جیسا کہ صفحہ ۶۰ پر ثابت کیا گیا نقطہ ھا وہ نقطہ ہے جس میں سے بوجھوں کا حاصل عمل کرتا ہے۔

اب مثلثات ا ب بَ اور • ط ا مشابہ ہیں۔

∴ ا بَ / ل۱ = •۱ / ف

∴ ا بَ = (•۱ × ل۱) / ف = (و۱ × ل۱) / ف

= ا کے گرد پہلے بوجھ کا معیار / ف

اسی طرح بَ جَ = ا کے گرد دوسرے بوجھ کا معیار / ف

اور علیٰ ہذا۔

∴ ا عَ = ا بَ + بَ جَ + جَ دَ + دَ عَ

= ا کے گرد بوجھوں کے میعاروں کا حاصل جمع / ت

لیکن سیا × ل = ا کے گرد بوجھوں کے میعاروں کا حاصل جمع

∴ و ع = سب × ل / ت

اب مثلثات و ع ت اور ۳ ۱ ط پر غور کرو۔ یہ مشابہ ہیں:-

∴ و ع / ل = ۳ ۱ / ت

∴ ۳ ۱ = ت × و ع / ل = سیا

اسی طرح ۱۰ = سپ

اب فصل کے کسی نقطہ ن پر غور کرو۔

قن = سیا - ن

= ۳ ۰ - ۲ ۰ = ۳ ۱ '

لیکن چونکہ نقطے کا معین ق مساوی ہے ۳ ' ۱ کے' اس لیے معلوم ہوا کہ زینہ نما شکل سے ہر نقطے پر جتنی قوت حاصل ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ ن میں کو متصابی خط خاؤ کے میعار کے نقشے کو ن' ن پر ملتا ہے اور ف ع مجوزیہ کو ع پر۔

تب بالکل سابق کے جیسے استدلال سے:

ن' ع = ن کے گرد سیا کا میعار / ت

ن' ع = ن کے گرد ق کا میعار / ت

∴ ن ن = ن ع - ن ع

= (ن کے گرد معاب کا معیار - و ہ کا معیار) / ف

= م / ف

∴ م = ف × ن ن

∴ خماؤ کے معیار کے نقشے کے معین سے کسی نقطے پر خماؤ کا معیار تعبیر ہوتا ہے۔

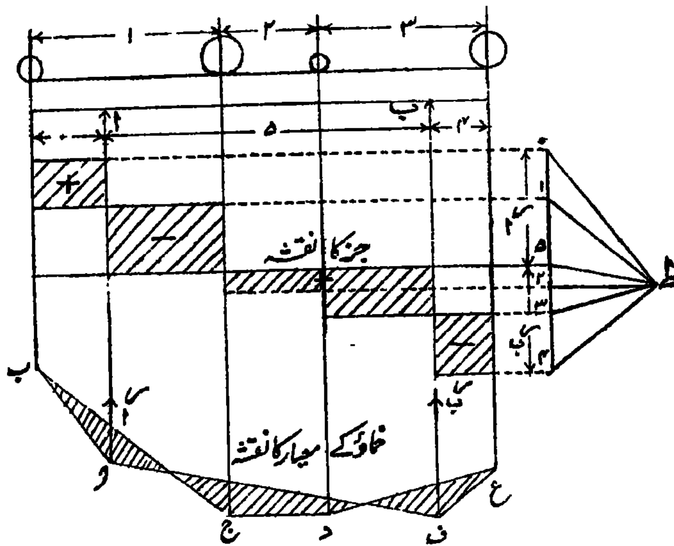
پیمانے :- برآمدہ بیرم کی صورت (صفحہ ۱۴۴ و ۱۴۵) کی طرح اگر مکانی نقشے میں ا انچ = لا فٹ اور قوت کے نقشے میں ا انچ = ما ٹن، اور اگر قطبی فاصلہ ف حقیقی انچ ہو تو خماؤ کے معیار کے نقشے کے انتصابی معین خماؤ کے معیار کو پیمانہ ا انچ = ف × لا × ما فٹ ٹن پر تعبیر کرینگے۔

نوٹ۔ اس ساخت میں خماؤ کا معیار ن ن انتصاباً ناپا جاتا ہے نہ کہ اختتامی خط ا ف کے علی القوائم۔

صورت ۶ - بے قاعدہ بوجھ - برآویختہ سرے

اوپر جو عمل بیان کیا گیا ہے اُس کا اطلاق اُس صورت پر بھی ہوتا ہے جس میں سرے برآویختہ ہوں۔ شکل ۵۶ میں ایسی ایک صورت دکھائی گئی ہے۔ حسب سابق بوجھوں کو ایک سمتی خط پر قایم کرو اور کوئی قطب ط لو۔ اب رقبہ میں یعنی سہارے کے انتصابی خط اور پہلی قوت کے خط کے درمیان کی جگہ میں ا ب متوازی ط . کے کھینچو۔ اور رقبہ ا میں ب ج متوازی ط ا کے اور علیٰ ہذا۔ آخری کڑی ع ف آخری قوت کے خط اور ردّ عمل کے انتصابی خط کے درمیان کھینچی جائیگی۔ ا ف کو ملانے سے خماؤ کے معیار کا نقشہ حاصل ہوگا جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔

جزکا نقشہ حاصل کرنے کے لیے ط ہ متوازی ا ف کے کھینچو۔ تب ہ میں کا افقی خط ا اور ب کے درمیان جز کے لیے اساسی خط ہوگا۔ سروں کے حصوں میں جز سروں کی قوتوں ۱، ۱ اور ۳، ۴ کے مساوی ہونگے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔



شکل ۵۶

شہتیر کے سرے بر آویختہ ترسیمی عمل

یہ ترسیمی طریقہ ہر قسم کے لداؤ کے لیے استعمال ہو سکتا ہے اور گزشتہ معیاری صورتوں میں سے جو صورت چاہیں اس کے ذریعے حل کر سکتے ہیں۔ مسلسل بوجھ کی صورت میں اس کو متعدد چھوٹے چھوٹے حصوں میں تقسیم کرنا چاہیے اور ہر ایک حصے کو ایک منفرد بوجھ سمجھنا چاہیے جو اس حصے کے مرکزِ جاذبہ میں سے عمل کرتا ہے۔

صورت ۶۔ یکساں بڑھتا ہوا بوجھ ——— فرض کرو کہ ایک شہتیر اب پر ایک بوجھ ہے جس کی حدت ب سے ا تک یکساں طور پر

بڑھتی ہے۔ فرض کرو کہ ب سے اکائی فاصلے پر بوجھ کی حدّت و ٹن فی طولی فٹ ہے۔ تب ب سے فاصلہ لا پر کسی نقطہ ط پر حدّت و لا ہوگی (شکل ۵۷)۔

یکساں بڑھتا ہوا بوجھ

بوجھ کا نقشہ

جز کا منحنی

مکافی

خماؤ کے معیار کا منحنی

تیسرے رتبہ کا مکافی

و ٹن فی فٹ

جز

خماؤ کا معیار

شکل ۵۷۔ خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے (گزشتہ سلسلہ)

اپر بوجھ کی حدت $و_۱$ ل ہوگی اور کل بوجھ و مساوی ہوگا

$و_۱ ل \times \frac{ل}{۲} = \frac{و_۱ ل^۲}{۲}$ کے۔

حاصل بوجھ و لداؤ کے نقشہ کے مرکز جاذبہ میں سے یعنی اسے فاصلہ $\frac{ل}{۳}$ پر عمل کریگا۔

$$\therefore \quad ر_ب = \frac{و}{۳}$$

$$ر_ا = \frac{۲ و}{۳}$$

اور $ق_ط$ = دائیں طرف کا مجموعی بوجھ

$$= \frac{و}{۳} - \frac{و_۱ لا^۲}{۲}$$

یہ $لا^۲$ پر منحصر ہے۔ اِس طرح جز کا منحنی ایک مکافی ہوگا۔

نقطہ $ج_۱$ اس طرح حاصل ہوگا:—

$$ق_{ج_۱} = ۰ = \frac{و}{۳} - \frac{و_۱ لا^۲}{۲}$$

$$\therefore \quad \frac{و_۱ لا^۲}{۲} = \frac{و}{۳} = \frac{و_۱ ل^۲}{۳ \times ۲}$$

$$\therefore \quad لا^۲ = \frac{ل^۲}{۳}$$

$$لا = \frac{ل}{\sqrt{۳}} = ۰٫۵۷۷ ل$$

$$م_ط = ر_ب \times لا - \frac{و_۱ لا^۲}{۲} \times \frac{لا}{۳}$$

$$= \frac{و لا}{۳} - \frac{و_۱ لا^۳}{۶}$$

یہ لاؔ پر منحصر ہے۔ اِس طرح خماؤ کے معیار کا منحنی ایک تیسرے رُتبہ کا مکافی ہوگا۔
اعظم خماؤ کا معیار صفر جز کے نقطے پر واقع ہوگا (دیکھو صفحہ ۱۶۵)، یعنی جہاں $لا = \frac{ل}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \text{اعظم خماؤ کا معیار} = \frac{و\,ل}{3\sqrt{3}} - \frac{و\,ل^3}{18\sqrt{3}}$$

$$= و\,ل\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{9\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2\,و\,ل}{9\sqrt{3}} = \frac{2\,و\,ل\sqrt{3}}{27}$$

$$= 0{,}128\,و\,ل$$

اِس طرح خماؤ کے معیار اور جز کے منحنی وہ حاصل ہوتے ہیں جو شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

صورت ۸۔ یکساں لدا ہوا شہتیر اور برآویختہ سرے۔ فرض کرو کہ ایک شہتیر کا فصل ل ہے اور اس پر وٹن فی طولی فٹ کا یکساں بوجھ ہے اور دونوں سروں پر طول لا برآویختہ ہے اور سہاروں کے درمیان فاصلہ لہ ہے۔

برآویختہ حصے برآمدہ بیرم کی مانند ہیں اور ان کے جز اور خماؤ کے معیار کے نقشے وہ ہونگے جو دکھائے گئے ہیں۔ وسطی حصہ کے لیے خماؤ کے معیار کا منحنی ایک مکافی ہوگا جو نقطہ دار قاعدے پر کھنچا ہوا ہے اور حاصل منحنی سایہ دار دکھایا گیا ہے۔

اگر فصل کے وسطی حصے پر سے بوجھ ہٹا لیا جائے تو خماؤ کے معیار کا نقشہ دونوں سروں کے مکافیوں اور نقطہ دار خط پر مشتمل ہوگا۔ یہ خماؤ کا معیار وسطی حصے کے بوجھ سے پیدا ہونے والے معیار کی مخالف سمت میں ہے اِس لیے وسطی حصے کا بوجھ رکھ کر اس کا مکافی کھینچنے پر حاصل منحنی اِن دونوں کا فرق ہوگا جیسا کہ دکھایا گیا ہے۔

یہ معلوم کرنے کے لیے کہ لا کی کس قیمت کے لیے حاصل اعظم خماؤ کا

معیار کم سے کم ہوگا حسب ذیل عمل کرو :-

لا کے بڑھنے سے سہاروں پر کا خماؤ کا معیار بڑھتا ہے اور مرکز پر کا حاصل خماؤ کا معیار گھٹتا ہے۔ اِس لیے اعظم خماؤ کا معیار کم سے کم اُس وقت ہوگا جب کہ سہاروں پر کا خماؤ کا معیار، مرکز پر کے خماؤ کے معیار کے مساوی ہو۔

$$\text{سہاروں پر خماؤ کا معیار} = \frac{\text{و}\,\text{لا}^{٢}}{٢}$$

$$\text{مرکز پر خماؤ کا معیار} = \frac{\text{و}\,\text{لہ}^{٢}}{٨} - \frac{\text{و}\,\text{لا}^{٢}}{٢}$$

$$\text{اگر یہ مساوی ہوں تو}\quad \frac{\text{و}\,\text{لا}^{٢}}{٢} = \frac{\text{و}\,\text{لہ}^{٢}}{٨} - \frac{\text{و}\,\text{لا}^{٢}}{٢}$$

$$\therefore\quad \text{و}\,\text{لا}^{٢} = \frac{\text{و}\,\text{لہ}^{٢}}{٨}$$

$$\text{لا} = \frac{\text{لہ}}{٢\sqrt{٢}}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{لہ}}{\text{ل}} = \frac{\text{لہ}}{\text{لہ} + ٢\,\text{لا}} = \frac{\text{لہ}}{\text{لہ} + \frac{\text{لہ}}{\sqrt{٢}}}$$

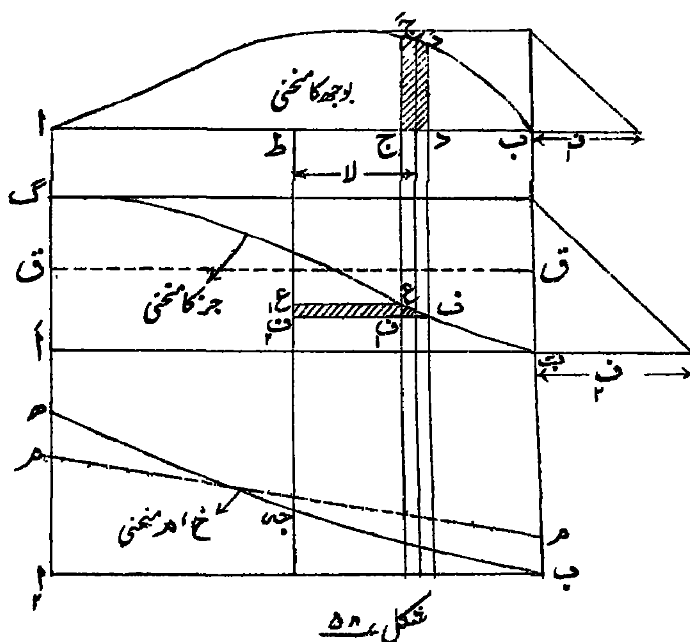
$$= \frac{١}{\frac{\sqrt{٢}}{٢} + ١} = \frac{٢}{\sqrt{٢} + ٢}$$

$$= \frac{٢\,(٢ - \sqrt{٢})}{٢} = ٢ - \sqrt{٢} = ٠٫٥٨٦$$

اِس سے حاصل ہوتا ہے کہ گھوڑی میز کے پائے کہاں لگائے جائیں جس سے زیادہ سے زیادہ مضبوطی حاصل ہو۔

بوجھ، جزء اور خماؤ کے معیار کے نقشوں کے درمیان ربط ۔۔۔ فرض کرو کہ ا جَ دَ ب (شکل ۵۸) فصل ا ب پر بوجھ کے

منحنی کو تعبیر کرتا ہے فصل کے کسی نقطہ ط پر غور کرو۔ اور بوجھ کے ایک چھوٹے حصے ج د پر غور کرو جس کا مرکز ط سے فاصلہ لا پر ہے۔
تب بوجھ کے اس حصے کی وجہ سے ط پر جز بوجھ کے منحنی کے حصہ ج د کے مساوی ہوگا۔ اس طرح ط پر کا مجموعی جز ق ط اس نقطے تک بوجھ کے منحنی کے رقبے کے مساوی ہوگا۔



شکل ۵۸

بوجھ، جز اور خماؤ کے معیار اثر کے نقشوں کے درمیان ربط

لیکن یہ دکھایا جا چکا ہے (صفحہ ۷۲) کہ حاصل جمع منحنی وہ منحنی ہے جس کا کسی نقطے پر کا معین ابتدائی منحنی کے اس نقطے تک کے رقبے کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لیے معلوم ہوا کہ جز کا منحنی بوجھ کے منحنی کا حاصل جمع منحنی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ب ف ع گ ا بوجھ کے منحنی کا حاصل جمع منحنی ہے۔
اب ط پر کے خماؤ کے معیار پر غور کرو۔

بوجھ کے حصہ ج د کی وجہ سے ط پر خماؤ کا معیار

= بوجھ کا یہ حصہ × لا

اب اگر جز کے منحنی پر متناظر نقطے ع اور ف ہوں تو ان پر کے معینوں کا فرق حصہ ج د پر کے بوجھ کے مساوی ہوگا۔

∴ حصہ ج د پر بوجھ = ع ف۱

∴ حصہ ج د کی وجہ سے ط پر خماؤ کا معیار = ع ف۱ × لا

∴ سایہ دار حصہ ع ف ف۲ ع۱ اس خماؤ کے معیار کو تعبیر کرتا ہے جو ط پر بوجھ کے حصہ ج د کی وجہ سے ہو۔

∴ ط پر مجموعی خماؤ کا معیار = م ط = ط تک جز کے نقشے کا رقبہ۔

∴ معلوم ہوا کہ خماؤ کے معیار کا منحنی جز کے منحنی کا حاصل جمع منحنی ہے۔

اس طرح جز کے منحنی کا حاصل جمع منحنی ب ج ہ ھ کھینچنے سے خماؤ کے معیار کا منحنی حاصل ہوگا۔

پیمانے ـــ اگر بوجھ کے منحنی کا پیمانہ ا انچ = لا ٹن فی فٹ ہو اور جز کا منحنی حاصل کرنے کے لیے جو قطبی فاصلہ استعمال کیا گیا وہ مکانی منحنی کے پیمانے پر ف۱ ہو تو جز کے منحنی کا پیمانہ ا انچ = ف۱ لا ٹن ہوگا۔ اگر خماؤ کے معیار کا منحنی قطبی فاصلہ ف۲ (مکانی پیمانے پر) کے ذریعے حاصل کیا گیا تو خماؤ کے معیار کا پیمانہ ا انچ = ف۲ ف۱ لا فٹ ٹن ہوگا۔

اعظم خماؤ کے معیار کا نقطہ ـــ اگر خماؤ کا معیار کسی نقطے پر ایک اعظم قیمت رکھتا ہو تو اس پر منحنی کا مماس افقی ہوگا۔ اور جز کے نقشے میں متناظر معین صفر ہوگا تاکہ قطب میں سے گزرنے والا خط بھی افقی ہو۔

اس طرح یہ قاعدہ حاصل ہوتا ہے کہ اعظم خماؤ کا معیار اس مقام پر واقع ہوتا ہے جہاں جز صفر ہو۔

جزر اور خماؤ کے معیار کے اساسی خط ق ق اور م م$_1$ اس پر منحصر ہونگے کہ سرے کیسے ہیں۔ اگر ایک سرا آزاد ہو تو اس پر جزر اور خماؤ کا معیار صفر ہونگے۔ اگر ایک سرا آزادانہ سہارا ہوا ہو تو اس نقطے پر جزر ردِ عمل کے مساوی ہوگا اور خماؤ کا معیار صفر ہوگا۔

اِن ربطوں کو ریاضی کی شکل میں اِس طرح بیان کیا جاتا ہے:۔ فرض کرو کہ مبداء سے فاصلہ لا پر کسی نقطہ پر بوجھ ف (لا) ہے۔

تب اِس نقطے پر جزر $= \int$ ف (لا) فرلا + س$_1$

اور خماؤ کا معیار $= \iint$ ف (لا) فرلا + س$_1$ لا + س$_2$

تکمل کے مستقل س$_1$ اور س$_2$ سروں کی کیفیت پر منحصر ہیں اور اساسی خطوط کے متناظر ہیں جن کا اوپر ذکر کیا گیا ہے۔

جہازوں کے خماؤ کے معیار اور جزر کے منحنی ــــ حاصل

جمع منحنی کے طریقے کے اطلاق کی ایک اچھی مثال جہازوں کی صورت میں پائی جاتی ہے۔ ہر جہاز کو ایک شہتیر تصور کرنا چاہیئے جس پر لداؤ کا ایک پیچیدہ نظام عمل کرتا ہے۔ اور بڑے جہازوں کی صورت میں تعمیر سے پہلے مجوزہ ابعاد اور بوجھوں سے جزر اور خماؤ کے معیار کے نقشے کھینچ لینے چاہییں۔

جہاز کو اس کے طول کے علی القوائم چند مستویوں سے جو تھوڑے تھوڑے فاصلے پر ہوں تقسیم کیا جاتا ہے پھر ہر دو تراشوں کے درمیان مجوزہ خطِ آب تک سیّال کا ہٹایا ہوا حجم ہموار پانی میں معلوم کیا جاتا ہے۔ تب اِن میں سے ہر ایک حجم کا وزن ماسکونیات کے اصولوں کی رُو سے اِن حصّوں پر پانی کے اوپر وار دباؤ کے مساوی ہوگا۔ اِس طرح سے جہاز کے طول کے مختلف نقاط پر اوپر وار دباؤ فی فٹ طول معلوم ہوگا۔ اِن دباؤں کو جہاز کے طول کے اساس پر ترسیم کرنے سے جو منحنی حاصل ہوگا اُسے ساکن پانی میں اچھال کا منحنی کہتے ہیں۔ یہ منحنی اج ب (شکل ۵۹) ہے اور اچھال کے منحنی کا رقبہ جہاز پر پانی کے

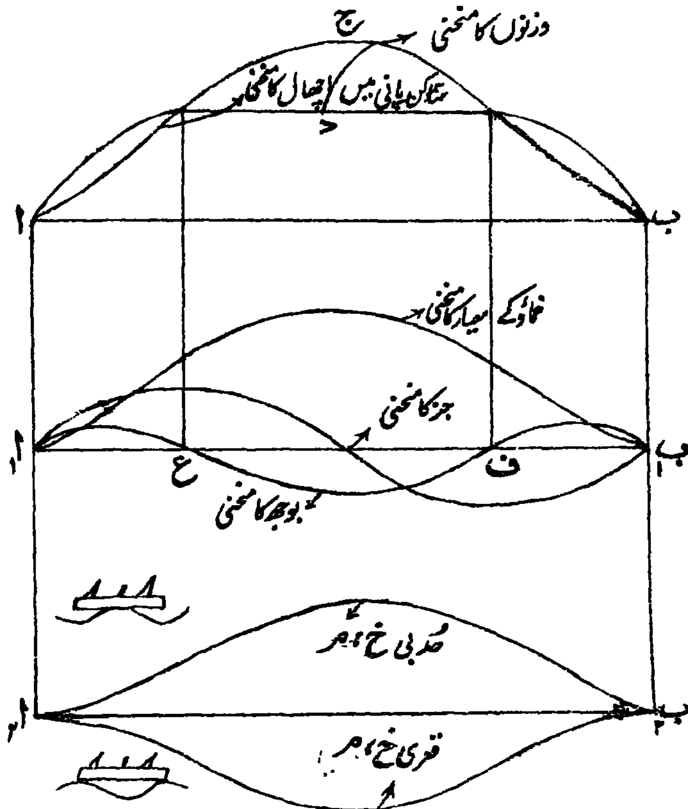
مجموعی اوپر دار دباؤ کے مساوی ہوگا۔ اس کے بعد جہاز کا وزن اس کے جسم انجن اور اسباب مال سمیت جس کا احتمال ہے ہر حصے کے لیے محسوب کیا جاتا ہے۔ اور وزن فی فٹ طول جہاز کو اساس ا ب پر اسی پیمانے پر ترسیم کیا جاتا ہے جس پر دباؤ ترسیم کیے گئے اور حاصل منحنی وزنوں کا منحنی کہلاتا ہے۔

وزنوں کے منحنی ا د ب کا رقبہ جہاز کے مجموعی وزن کے مساوی ہوگا اور چونکہ جہاز کا مجموعی وزن پانی کے مجموعی اوپر دار دباؤ کے مساوی ہونا چاہیے اس لیے اچھال کے منحنی کا رقبہ وزنوں کے منحنی کے رقبے کے مساوی ہونا چاہیے۔ وزنوں کے منحنی اور اچھال کے منحنی کے معینوں کا فرق اس بوجھ کو تعبیر کرتا ہے جو جہاز کو بطور شہتیر کے برداشت کرنا ہوتا ہے اور اس کو ایک نئے اساس ا، ب، پر ترسیم کیا جائے تو بوجھ کا منحنی حاصل ہوتا ہے۔

نقاط ع، ف، جن پر بوجھ کا منحنی اساسی خط کو عبور کرتا ہے "پانی سے اٹھائی ہوئی" تراشیں کہلاتی ہیں اور ان تراشوں پر جز اعظم ہوگا۔ بوجھ کے منحنی کا حاصل جمع منحنی معلوم کریں تو وہ جز کا منحنی ہوگا اور پھر اس کا حاصل جمع منحنی لینے سے خماؤ کے معیار کا منحنی حاصل ہوگا۔

یہ منحنی جہاز کے لیے اسی وقت کے لیے درست ہیں جب کہ جہاز ہموار پانی میں ہو۔ ناہموار پانی میں مسئلہ زیادہ مشکل ہو جاتا ہے لیکن دو خاص صورتیں قابل غور ہیں یعنی جب کہ موج کا اوج جہاز کے وسط کے نیچے آئے جس سے "حدبی فساد" واقع ہوتے ہیں اور جب کہ موج کا حضیض جہاز کے وسط کے نیچے آئے جس سے "قعری فساد" پیدا ہوتے ہیں۔ شکل میں یہ انتہائی صورتیں دکھائی گئی ہیں۔

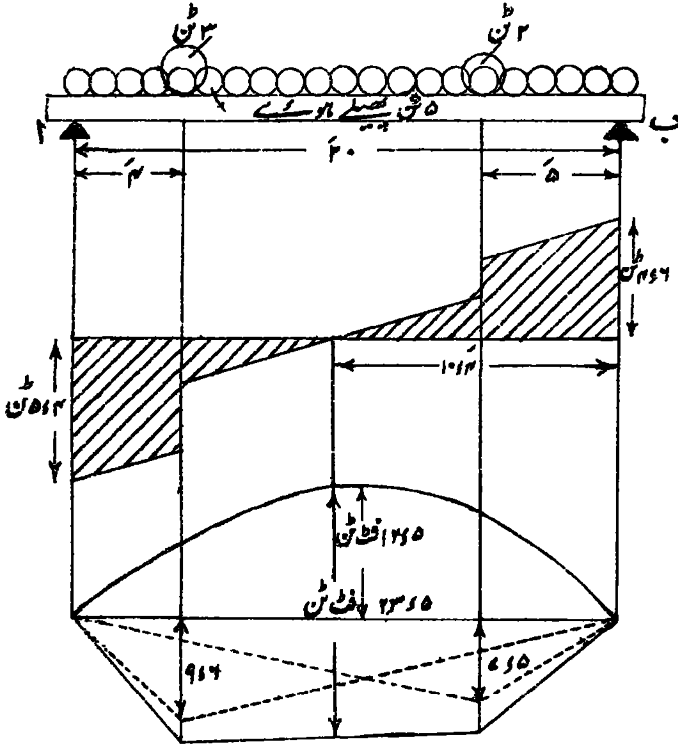
اِس مسئلہ کی مکمل بحث اس کتاب کی وسعت سے باہر ہے۔



شکل ۵۹
جہازوں کے خماؤ کے معیار اور جزر کے منحنی

مزید معلومات کے لیے طالب علم اُن کتابوں کا مطالعہ کریں جو بحری فنِ تعمیر سے بحث کرتی ہیں۔

جزر کے منحنیوں کی سیڑھیاں —— عملاً یہ ناممکن ہے کہ جزر کے نقشے میں بالکل نوک دار سیڑھیاں حاصل ہوں کیونکہ بوجھ بالکل ایک ریاضیاتی نقطہ پر منتقل نہیں ہو سکتا بلکہ ایک چھوٹے طول پر پھیلا ہوا



شکل ۶۰

ہونا لازمی ہے۔ اس کا نتیجہ یہ ہے کہ جز کے نقشے کے کونے کسی قدر گول ہو جاتے ہیں جیسا کہ شکل ۶۱ صفحہ ۱۷۳ میں مبالغے کے ساتھ دکھایا گیا ہے۔

عددی مثالیں

(۱) ۲۰ فٹ فصل کے ایک آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر پر ۵ ٹن کا ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ اور ۳ اور ۲ ٹن کے منفرد بوجھ سروں سے

علی الترتیب ۴ اور ۵ فٹ کے فاصلوں پر ہیں (دیکھو شکل ۶)۔
پہلے ردِ عمل ر‌ا اور ر‌ب معلوم کرنا ہے۔
ب کے گرد معیار لو۔

ر‌ا × ۲۰ = ۱۰ × ۵ + ۱۶ × ۳ + ۵ × ۲

= ۵۰ + ۴۸ + ۱۰ = ۱۰۸

∴ ر‌ا = ۱۰۸/۲۰ = ۵٫۴ ٹن

ر‌ب = ۱۰ − ۵٫۴ = ۴٫۶ ٹن

اس طرح جزی نقشہ وہ حاصل ہوتا ہے جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ سیڑھیوں کی مقداریں منفرد بوجھوں کے مساوی ہیں۔ صفر جزر کا مقام اس طرح حاصل ہوگا:—
فرض کرو کہ یہ ب سے فاصلہ لا پر ہے۔ تب

۰ = ق‌لا = ر‌ب − ۲ − و × لا

= ۴٫۶ − ۲ − ۵ لا/۲۰

= ۲٫۶ − لا/۴

∴ لا/۴ = ۲٫۶

یا لا = ۱۰٫۴ فٹ

اس نقطے پر خماؤ کا معیار اعظم ہوگا اور حسب ذیل ہوگا:—

م‌لا = ر‌ب × ۱۰٫۴ − ۲ (۱۰٫۴ − ۵) − ۱/۴ × (۱۰٫۴)²/۲

= ۴۷٫۸۴ − ۱۰٫۸ − ۱۳٫۵۲

= ۲۳٫۵۲ فٹ ٹن

خماؤ کے معیار کا نقشہ یکساں پھیلے ہوئے بوجھ کے لیے ایک مکافی ہوگا جس کا اعظم معیّن = ۲۰×۵ / ۸ = ۱۲٫۵ فٹ ٹن۔ اور ہر ایک منفرد بوجھ کے لیے نقشہ ایک مثلث ہوگا جس کی بلندی ان بوجھوں کے لیے علی الترتیب ۱۶×۴×۳ / ۲۰ = ۹٫۶ فٹ ٹن، اور ۱۵×۵×۲ / ۲۰ = ۷٫۵ فٹ ٹن

اِن تینوں شکلوں کو جوڑنے سے خماؤ کے معیار کا وہ نقشہ حاصل ہوگا جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اِس کا اعظم معیّن پیمایش سے ۲۳٫۵ فٹ ٹن پایا جائیگا۔

نوٹ۔ صریحاً ان تمام عملوں میں جن میں نقشوں کو جوڑنا ہو یہ نقشے ایک ہی پیمانے پر کھینچے جانے چاہییں۔

(۲) ۲۴ فٹ فصل کا ایک گرڈر ایک سرے پر سہارا ہوا ہے، اور دوسرے سرے سے ۶ فٹ کے فاصلے پر ایک ستون پر رکھا ہوا ہے۔ گرڈر پر ۶ ٹن کا ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ ہے اور آزاد سرے پر ۲ ٹن کا ایک منفرد بوجھ ہے۔ جز اور خماؤ کے معیار کے منحنی کھینچو۔

ردِّ عمل معلوم کرنے کے لیے ا کے گرد معیار لو (شکل ۶۱)۔ تب

۱۸ ر_ب = ۱۲×۶ + ۲۴×۲ = ۱۲۰

∴ ر_ب = ۱۲۰ / ۱۸ = ۶⅔ ٹن

∴ ر_ا = ۸ − ۶⅔ = ۱⅓ ٹن

جز ج پر ۲ ٹن ہوگا اور بڑھتے بڑھتے اُس کی قیمت ب پر ۳٫۵ ٹن ہوگی۔ یہاں ایک دم اس کی علامت بدلتی ہے۔ اور قیمت ۳٫۱۷ ٹن ہوجاتی ہے اور پھر یکساں گھٹتے ہوئے سرے ا پر قیمت ۱٫۳۳ ہوتی ہے۔ جز کا نقشہ وہ حاصل ہوتا ہے جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ دار خط سے یہ دکھایا گیا ہے کہ بوجھوں اور ردِّ عملوں کو ریاضیاتی نقطوں پر مرتکز نہ کرسکنے کی وجہ سے عملاً کیا صورت ہوتی ہے۔

پہلے منفرد اور یکساں بوجھوں کے لیے خاؤ کے معیار علٰحدہ علٰحدہ معلوم کریں تو منفرد بوجھ کی وجہ سے خاؤ کے معیار کا منحنی وہ حاصل ہوگا جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ ب پر خاؤ کا معیار = ۶ × ۲ = ۱۲ فٹ ٹن۔ اب یکساں بوجھ پر غور کرو۔ حصہ ب ج کے لیے نقشہ ایک مکانی ہوگا جس کا راس ج پر ہوگا اور ب۱ پر معین ب۱د = $\frac{و ل^۲}{۲} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۶ \times ۶}{۲} = ۴٫۵$ فٹ ٹن۔ اور ب اور ا کے درمیان اس برآویختہ بوجھ کی وجہ سے خاؤ کے معیار کا منحنی خطِ مستقیم ا د ہوگا کیونکہ اس برآویختہ بوجھ کو سنبھالنے کے لیے ا پر ایک منفرد بوجھ کی ضرورت ہوگی۔

حصہ ا ب کے لیے خاؤ کے معیار کا منحنی ایک مکانی ہوگا جس کا مرکزی ارتفاع = $\frac{و ل^۲}{۸} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱۸ \times ۱۸}{۸} = ۱۰٫۱۲$ فٹ ٹن۔ دونوں حصّوں کے لیے یکساں بوجھ کا حاصل منحنی سایہ دار مرکزی رقبے سے تعبیر ہوتا ہے۔ منفرد بوجھ اور یکساں بوجھ کے نقشوں کو ملانے سے حاصل خاؤ کے معیار کا منحنی وہ حاصل ہوتا ہے جو دکھایا گیا ہے۔ اعظم خاؤ کا معیار ب پر واقع ہوتا ہے اور ۱۶٫۵ فٹ ٹن ہوتا ہے۔

(۳) ۲۰ فٹ فصل کے ایک شہتیر پر $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$، ۱، اور ۲ ٹن کے بوجھ شکل ۲۰ کے مطابق رکھے گئے ہیں۔ اعظم خاؤ کا معیار ترسیماً معلوم کرو۔

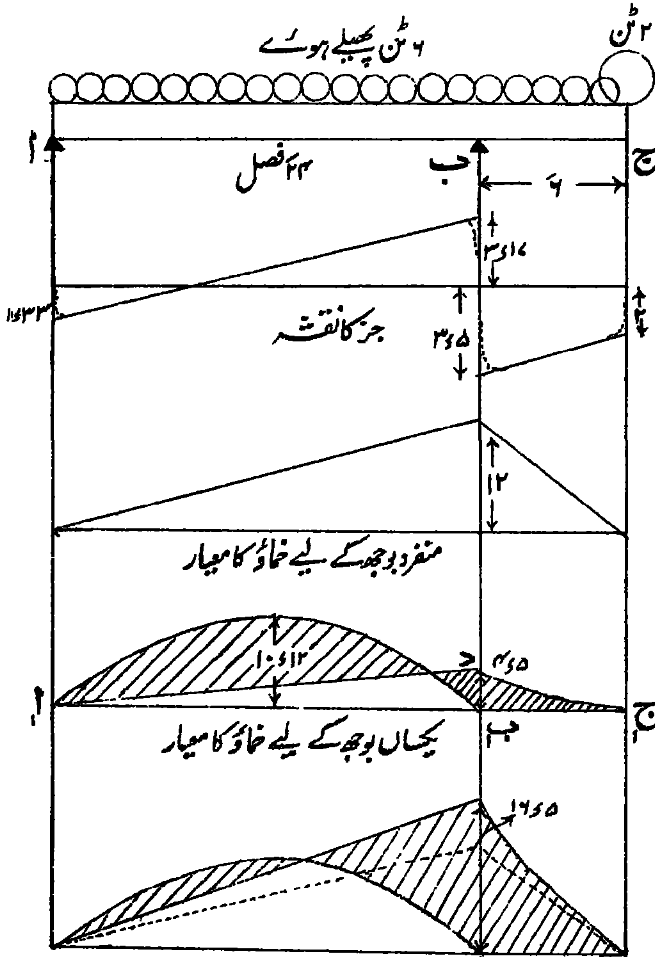
خاؤ کے معیار کا منحنی سمتی اور ریسمانی کثیر الاضلاع کے ذریعے معلوم کرو جیسا کہ شکل ۵۵ میں دکھایا گیا ہے۔ مکانی پیمانہ ۱ انچ = ۴ فٹ لو، بوجھ کا پیمانہ ۱ انچ = ۲ ٹن اور قطبی فاصلہ $\frac{۱}{۴}$ انچ۔ تب خاؤ کے معیار کے منحنی کا اعظم معین ۱٫۰۹ انچ دیا جائیگا۔ اس کا پیمانہ ۱ انچ = $\frac{۱}{۴} \times ۱ \times ۴ \times ۲$ = ۱۰ فٹ ٹن ہوگا۔

∴ اعظم خاؤ کا معیار = ۱۰٫۹ فٹ ٹن

(۴) ایک بجرا ۸۰ فٹ لمبا ہے۔ اس کے اُچھال کا منحنی ایک مستطیل ہے اور اس کا ذاتی وزن یکساں پھیلا ہوا ہے۔ اس میں ۴۰ ٹن اینٹیں لادی گئی ہیں اور تمام انتصابی تراشیں منحرف کی شکل میں ہیں جن کے اُفقی اضلاع ۸۰ اور ۴۰ فٹ طول کے ہیں۔ جہ اور

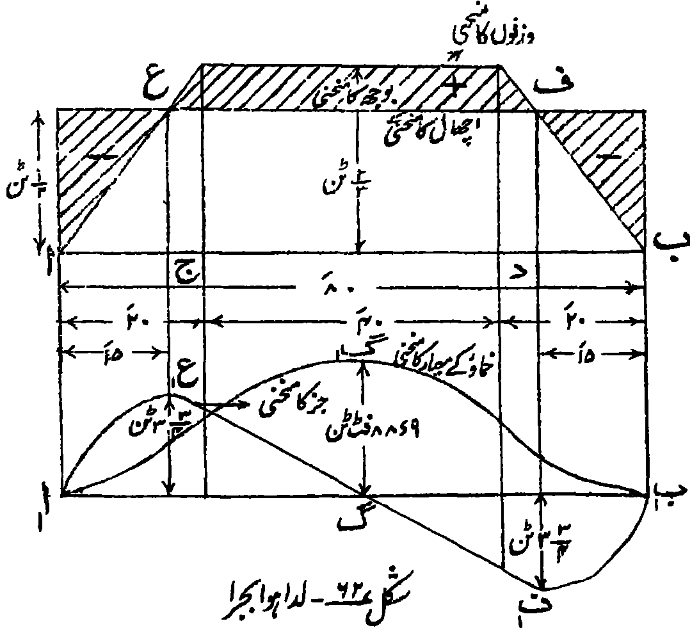
خماؤ کے معیار کے منحنی معلوم کرو۔

اگر بجرے کا اُچھال کا منحنی ایک مستطیل ہے اور اس کا ذاتی وزن یکساں پھیلا ہوا ہے تو خود بجرے کے وزن اور اچھال کے منحنی ایک دوسرے کی تعدیل کر دینگے اور اس وزن کی وجہ سے کوئی جزر یا خماؤ کا معیار نہ پیدا ہوگا۔ لادے ہوئے بوجھ کی وجہ سے اچھال کا منحنی ایک مستطیل ہوگا جس کا ارتفاع $\frac{1}{4}$ ٹن فی طولی فٹ ہوگا کیونکہ مجموعی بوجھ ۱۰ ٹن ہے۔



شکل ۶۱

اس طرح وزنوں کا منحنی ایک منحرف ہوگا جس کا رقبہ ۴۰ ٹن کو تعبیر کریگا اور جس کے



شکل ۶۲۔ لداہوا بجرا

متوازی اضلاع ۴۰ فٹ اور ۸۰ فٹ کے ہو نگے۔

$$\therefore \text{ منحرف کا ارتفاع } = \frac{۴۰}{\frac{۱}{۲}(۸۰+۴۰)} = \frac{۲}{۳} \text{ ٹن فی طولی فٹ}$$

وزنوں اور اچھال کے منحنیوں کے فرق سے بوجھ کا منحنی حاصل ہوگا جو شکل ۶۲ میں سایہ دار دکھایا گیا ہے۔ پانی سے اٹھائی ہوئی تراشیں ع، ف سروں سے ۱۵ فٹ کے فاصلوں پر ہیں۔ بوجھ منحنی کا حاصل جمع منحنی لینے سے جزر کا منحنی ا ع گ ف ب حاصل ہوتا ہے اور پھر اس کا حاصل جمع منحنی لینے سے خماؤ کے معیار کا منحنی ا گ ب حاصل ہوتا ہے۔ پیمانے یوں معلوم کیے جا سکتے ہیں:۔
فرض کرو کہ مکانی پیمانہ ۱ انچ = ۱۰ فٹ ہے اور بوجھ کا پیمانہ ۱ انچ = $\frac{۱}{۴}$ ٹن فی فٹ ہے۔ تب اگر جزر کا منحنی قطبی فاصلہ ۲ انچ یعنی ۲۰ فٹ کے ساتھ کھینچا جائے تو جزر کا پیمانہ ۱ انچ = $\frac{۱}{۴} \times ۲۰ = ۵$ ٹن ہوگا۔ اگر خماؤ کے معیار کا منحنی قطبی فاصلہ ۲ انچ یعنی ۲۰ فٹ کے

ساتھ کھینچا جائے تو خماؤ کے معیار کا پیمانہ ۱ انچ = ۲۰ × ۵ = ۱۰۰ فٹ ٹن ہوگا۔

پایا جائیگا کہ اعظم جز ۳¾ ٹن ہے، اور ع اور ف۱ پر ہے، اور اعظم خماؤ کا معیار ۸۸٫۹ فٹ ٹن ہے جو مرکز پر ہے۔

نوٹ۔ شکل میں منحنی پیمانے پر نہیں کھینچے گئے۔

خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے مائل بوجھوں کے لیے

اب تک جتنی صورتوں پر غور کیا گیا ہے ان سب میں لداؤ شہتیر کے طول کے علی القوائم تھا۔ اب ہم چند ایسی صورتوں پر غور کرینگے جن میں ایسا نہیں اور دونوں قسم کی صورتیں لینگے یعنی ایک تو افقی شہتیر اور غیر انتصابی بوجھ اور دوسرے خود شہتیر غیر افقی۔ اِن صورتوں کی خصوصیت یہ ہے کہ اِن میں شہتیر کی سمت میں دھکیل پیدا ہوگا اور جز اور خماؤ کے معیار کے علاوہ دھکیل کا منحنی بھی حاصل ہوگا۔

عام قاعدہ یہ ہے کہ تمام قوتوں کو ردِ عملوں سمیت شہتیر کے طول کی سمت میں اور علی القوائم تحلیل کیا جائے۔ شہتیر کے طول کی سمت کی قوتوں سے دھکیل کا منحنی بھی کھینچا جا سکتا ہے اور شہتیر کے علی القوائم قوتوں سے جز اور خماؤ کے معیار کے منحنی معمولی طور پر کھینچے جا سکتے ہیں۔

شہتیر کے کسی نقطے پر دھکیل کی تعریف یہ ہے کہ یہ اس نقطے کے دائیں طرف کی تمام قوتوں کا شہتیر کی سمت میں جزِ تحلیلی ہے۔ خیال رہے کہ اگر دھکیل منفی ہو تو وہ کھینچ بن جاتا ہے۔

صورت ۱۔ افقی شہتیر، آزادانہ سہارا ہوا، بوجھ مائل —

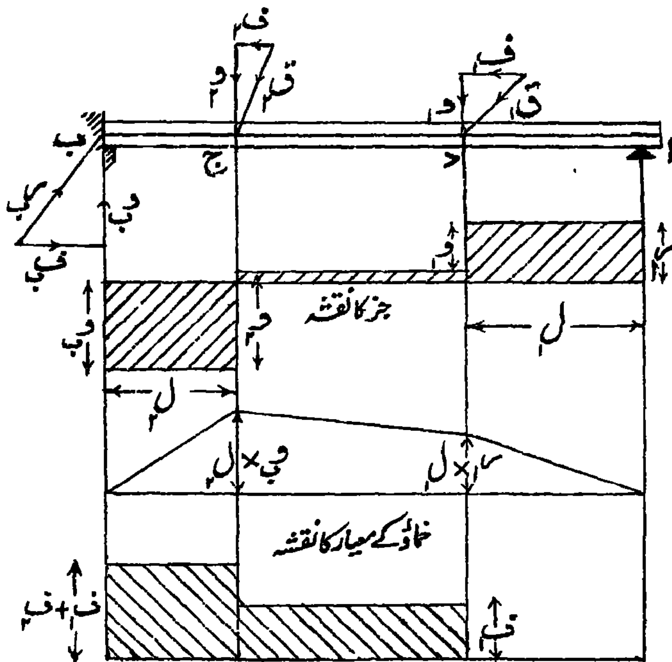
فرض کرو کہ ایک شہتیر ا ب پر مائل قوتیں ق۱، ق۲ (شکل ۶۳) عمل کرتی ہیں اور شہتیر کے مرکزی خط کو ج اور د پر ملتی ہیں۔ فرض کرو کہ سرا ا ایک آزاد سہارے پر ٹکا ہوا ہے اور سرا ب آزادانہ سہارا ہوا ہے لیکن طولاً حرکت کرنے سے روک دیا گیا ہے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اگر ق۱ اور ق۲ کا حاصل سرے ا کی طرف عمل کرتا تو ا کی حرکت کو روکنا پڑتا۔ قوتوں ق۱ اور ق۲ کو

انتصابی اجزائے تحلیلی و۱ اور و۲ اور افقی اجزائے تحلیلی ف۱ اور ف۲ میں تحلیل کرو۔

ر ب مائل ہوگا جس کا انتصابی جزوِ تحلیلی و ب اس طرح حاصل ہوگا کہ قوتوں و۱ اور و۲ پر معمولی طور پر غور کیا جائے۔ اور افقی جزوِ تحلیلی ف ب مساوی ہوگا ف۱ اور ف۲ کے۔

ردِ عمل ر۱ انتصابی ہوگا اور اس طرح حاصل ہوگا کہ قوتوں و۱ ، و۲ پر معمولی طور پر غور کیا جائے۔

اگر ق۱ اور ق۲ کا حاصل معلوم کیا جائے تو وہ ر۱ اور ر ب کے تقاطع میں سے گزرتا ہوا ہوگا کیونکہ تین متعادل قوتوں کو ایک نقطے میں سے گزرنا لازمی ہے۔



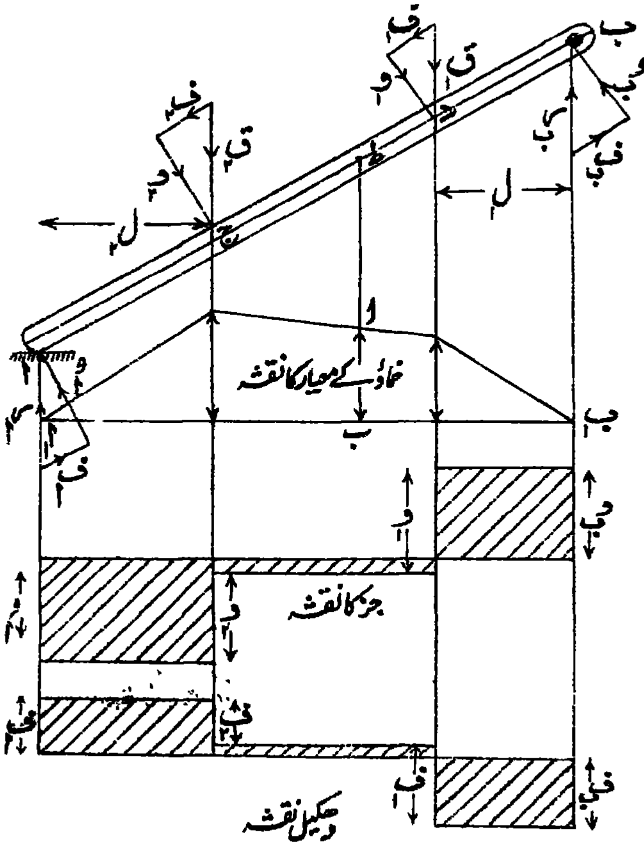
شکل ۶۳ ۔ مائل بوجھوں کا شہتیر

اب جز اور خماؤ کے معیار کے نقشے معمولی طور پر وزنوں و۱ اور و۲ کے لیے معلوم کیے جاتے ہیں جیسا کہ دکھائے گئے ہیں۔

ڈھکیل کا نقشہ اس طرح حاصل ہوگا کہ ہر نقطے پر ڈھکیل کی قیمت ترسیم کی جائے اور یہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ یہی طریقہ بوجھوں کی کسی تعداد کے لیے درست ہے۔ یہاں دو بوجھ صرف شکل کی آسانی کے لیے لیے گئے ہیں۔

صورت ۲۔ مائل شہتیر اور انتصابی بوجھ۔ ردِ عمل متوازی۔

فرض کرو کہ ایک مائل شہتیر اب (شکل ۶۴) ا پر آزادانہ سہارا ہوا ہے



شکل ۶۴۔ مائل شہتیر جس کا زیریں سرا آزادانہ سہارا ہوا

اور ب پر قبضہ دار ہے۔ تب اگر اس پر انتصابی قوتیں ق، ق نقاط ج اور د پر عمل کریں تو ا پر کا اور اس طرح ب پر کا بھی ردّ عمل انتصابی ہوگا اور ان کی قیمتیں معمولی طریقے پر حاصل ہونگی۔

اب وزنوں اور ردّ عملوں کو شہتیر کے طول کی سمت میں اور علی القوائم تحلیل کرو جس سے وزن و، و، و، و اور دھکیل ف، ف، ف، ف حاصل ہونگے۔

اب خماؤ کے معیار کے نقشے کو ڈھلواں قاعدے اب پر یا اس کے افقی ظل اب پر کھینچ سکتے ہیں۔

م = و × د ب

لیکن د ب / ل = سب / و

∴ و × د ب = سب ل

اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ انتصابی ردّ عملوں کے ڈھلواں شہتیر کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ وہی ہوگا جو اس ڈھلواں شہتیر کے افقی ظل کے مساوی فصل کے افقی شہتیر کا ہوگا۔

مثلاً نقطہ ط پر خماؤ کا معیار اس طرح حاصل ہوگا کہ اس میں سے ایک انتصابی خط کھینچا جائے۔ یہ خماؤ کا معیار ا ب سے تعبیر ہوتا ہے۔

جز اور دھکیل کے نقشے وہ حاصل ہونگے جو دکھائے گئے ہیں، اور شکل سے سمجھ میں آجائینگے۔

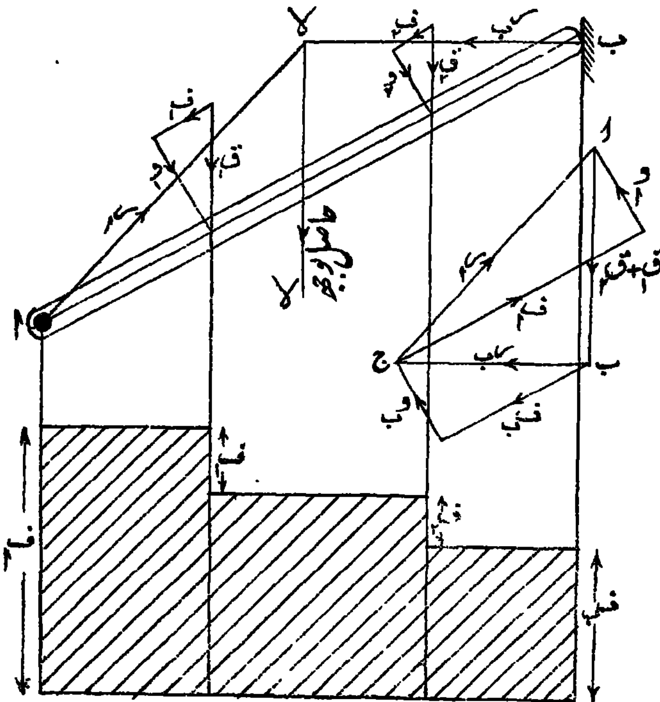
صورت ۳۔ مائل شہتیر اور انتصابی بوجھ۔ بالائی ردِّ عمل

اُفقی —— اِس صورت میں پہلے حاصل بوجھ معلوم کرنا چاہیے۔ فرض کرو کہ یہ حاصل خط لا لا میں عمل کرتا ہے (شکل ۶۵)۔ ب پر کا ردِّ عمل سب افقی ہے اس لیے ب لا افقاً کھینچو جو اگر لا لا کو لا پر ملے تو سا کو

بھی لا میں سے گزرنا چاہیے۔ اس طرح ا لا کو ملانے سے سر کی سمت حاصل ہوگی۔ سرا اور سب کی قیمتیں قوتوں کے مثلث و، ب، ج سے حاصل ہونگی۔

اب پہلے کی طرح وزنوں اور ردِّ عملوں کو اب کے طول کی سمت میں اور اس کے علی القوائم تحلیل کرو۔ علی القوائم اجزائے تحلیلی پہلے کے سے ہونگے اور اس طرح خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے وہی ہونگے جو گزشتہ صورت میں حاصل ہوئے (شکل ۶۴)۔

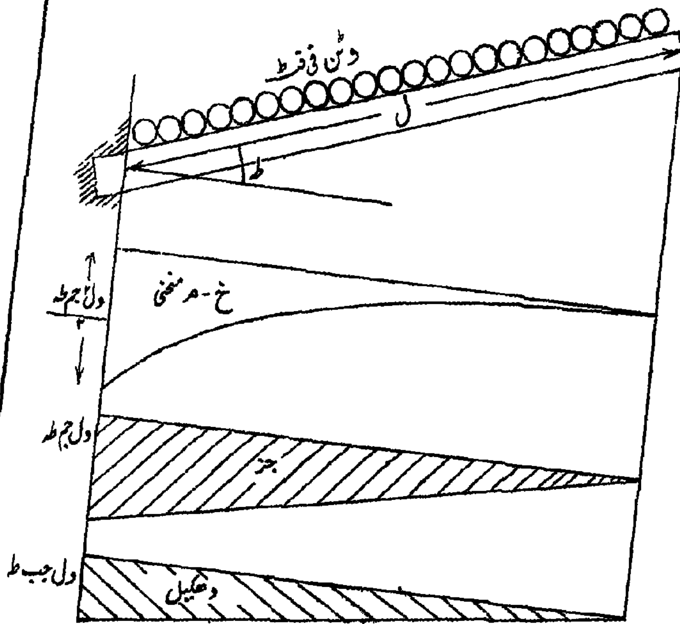
دھکیل مختلف ہونگے اور وہ ہونگے جو شکل میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل آسانی سے سمجھ میں آجائیگی۔



دھکیل نقشہ

شکل ۶۵۔ مائل شہتیر جس کا بالائی سرا آزادانہ سہارا ہوا

صورت ۴- ڈھلواں برآمدہ بیرم ——— اس کو بھی اسی طرح
حل کیا جاتا ہے - مثلاً ایک برآمدہ بیرم پر غور کرو جس کا طول ل اور میلان طہ
ہے اور جس پر ایک یکساں بوجھ حدت و کا ہے (شکل ۶۵ ر) - خماؤ کے
معیار کا منحنی ایک مکافی ہوگا - اس کا اعظم معین (ول۲ جم طہ)/۲ ہوگا، کیونکہ مجموعی
وزن و ل ہے اور پیل پایہ سے فاصلہ (ل جم طہ)/۲ پر عمل کرتا ہے - جز
کا نقشہ ایک ڈھلواں خطِ مستقیم ہوگا اور اعظم جز و ل جم طہ ہوگا - ڈھکیل کا نقشہ
بھی ایک ڈھلواں خطِ مستقیم ہوگا اور اعظم ڈھکیل و ل جب طہ ہوگا۔



شکل ۶۵ ر
ڈھلواں برآمدہ بیرم پر یکساں بوجھ

جز، دھکیل، اور خماؤ کے معیار کی عام صورت۔

دباؤ کا خط ۔ اب تک جتنی صورتوں پر غور کیا گیا ان سب میں دیکھا گیا کہ جز، دھکیل اور خماؤ کے معیار دریافت کرنے کے لیے پہلے ردِّ عملوں کو معلوم کرنا ضروری ہے۔ اب ہم کسی شہتیر یا پسلی پر غور کرینگے جس کا مرکزی خط ا ب ہے اور جس پر اسی مستوی میں قوتوں کا کوئی نظام مثلاً قوتیں ق۱، ق۲، ق۳ (شکل ۶۶) عمل کرتی ہیں، اور فرض کرو کہ ردِّ عملوں کی مقدار یا سمت معلوم ہے اور ردِّ عمل ر۱ اور رب ہیں۔ پہلے کی طرح قوتوں کے درمیان کے رقبوں کو نمبر لگا کر ایک سمتی شکل ۱، ۲، ۳، ۷ کھینچو۔

اب ۷ کو قطب مان کر اور پہلی کڑی کو پہلی قوت رب پر منطبق کر کے رسیانی کثیر الاضلاع ب، د، ب، ج، ا کھینچو۔ اگر یہ صحیح کھینچا گیا تو آخری کڑی ردِّ عمل ر۱ پر منطبق ہوگی۔ یہ رسیانی کثیر الاضلاع تعمیر کا دباؤ کا خط کہلاتا ہے۔

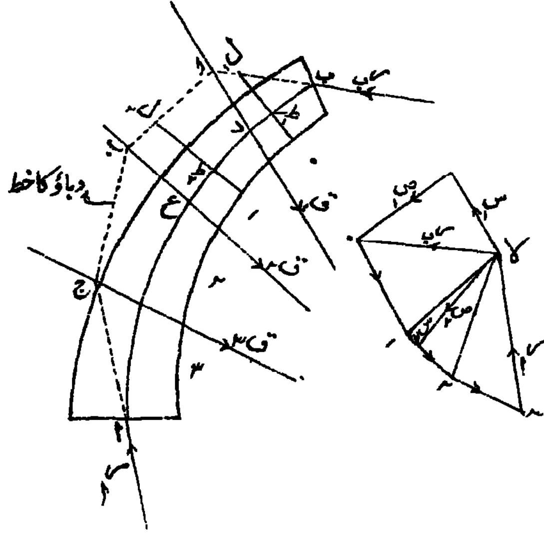
اب فرض کرو کہ قوتیں ق۱، ق۲، ق۳ تعمیر کے مرکزی خط کو نقاط د، ع وغیرہ پر ملتی ہیں۔

ب اور د کے درمیان کسی نقطہ ط۱ پر کی تراش پر غور کرو۔ اس تراش میں سے جو زور عمل کرینگے وہ تراش کے ہر ایک طرف کی تمام قوتوں کو یعنی قوت رب کو تعادل میں رکھینگے۔ تراش کو خارج کر کے رب کے خطِ عمل سے ل۱ پر ملنے دو۔ یہ نقطہ اس تراش کا بوجھ نقطہ کہلاتا ہے۔

اگر رب کے اجزائے تحلیلی ط۱ ل۱ کے علی القوائم اور متوازی ص۱ اور س۱ ہوں تو نقطہ ط۱ پر جز س۱ کے مساوی ہوگا۔ دھکیل ص۱ ہوگا اور خماؤ کا معیار ص۱ × ط۱ ل۱ ہوگا۔

اسی طرح د اور ع کے درمیان نقطہ ط۲ پر کی تراش پر غور کرو۔ تراش کے

اوپر کی جانب قوتیں س۲ ب اور ق ا ہیں۔ اِن کا حاصل لا ا ہے، اور دباؤ کے



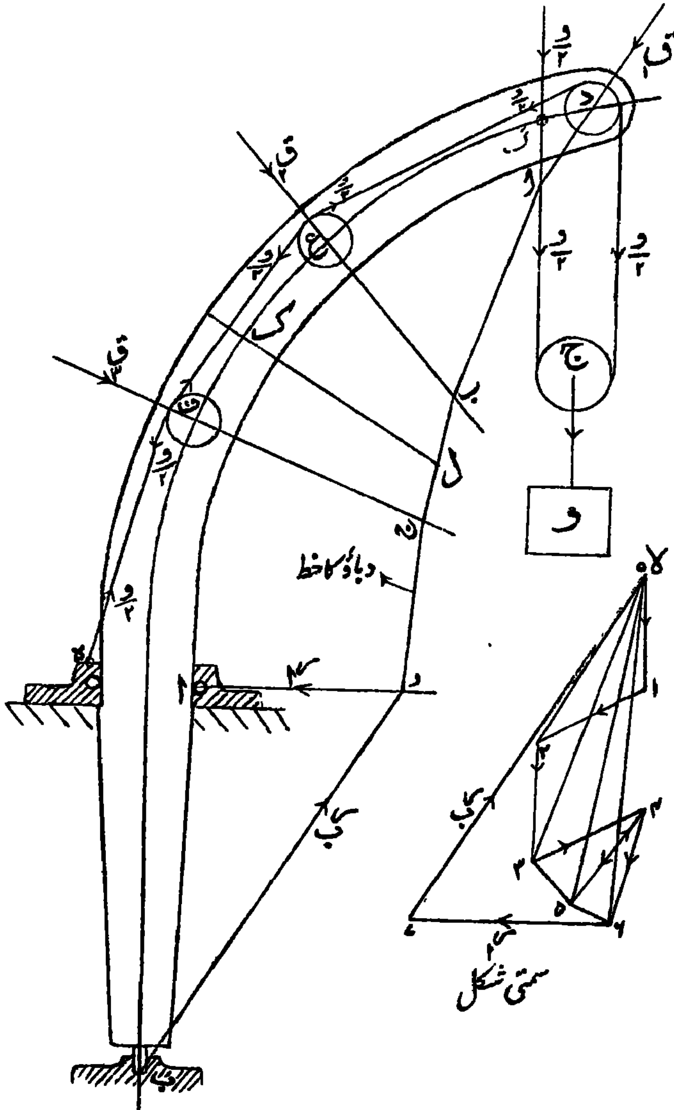
شکل ۶۶۔ دباؤ کا خط

خط ا ب میں عمل کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ط۲ پر کی تراش دباؤ کے خط کے حصہ ا ب یا ا ب مخروجہ کو ل۲ پر ملتا ہے۔ تب ل۲ نقطہ ط۲ پر کی تراش کا بوجھ نقطہ ہوگا۔ اور لا ا کو ط۲ ل۲ کے علی القوایم اور متوازی تحلیل کرنے سے جزء دھکیل، اور کھنچاؤ کا معیار پہلے کی طرح حاصل ہونگے۔ یہ عمل ہر تعمیر کے لیے قابلِ استعمال ہے۔ البتہ صرف ایک دِقت ہے جو اکثر صورتوں میں پیش آتی ہے اور وہ س۱ م اور س۱ ب کی سمت یا قیمت کا معلوم کرنا ہے۔

دباؤ کے خط سے کمانوں اور چنائی کی عام تعمیروں کی قائمیت میں زیادہ تفصیل کے ساتھ بحث کی جائیگی۔

مثال کے طور پر ایک خمدار حمالہ پر غور کرو جس کو ا پر ایک گوئی

یا پتھر کی مسند اور ب پر کے جوف میں ایک چول لگی ہوئی ہے (شکل ۶۷)۔ بوجھ و ایک چرخی ج سے لٹکتا ہے جس کو اٹھانے والی زنجیر



شکل ۶۷ - دباؤ کا خط حمالہ کے لیے

حمالہ کو نقطہ گ پر ثابت ہے اور چرخیوں د، ع، ف پر سے ہوتی ہوئی حمالہ سے گزر کر رفعی کل کو چلی جاتی ہے۔ اِس زنجیر میں تناؤ $\frac{و}{۲}$ ہوگا۔

اب سمتی شکل کھینچنا شروع کرو۔ اِس طرح کہ ۰، ۱ انتصابی لو جو $\frac{و}{۲}$ کو تعبیر کرے اور ۱، ۲ کو د اور ع کے درمیان کی زنجیر کے متوازی۔ تب ۲، ۰ سے چرخی د پر کی قوت $ق_۱$ تعبیر ہوگی۔ اس کے بعد انتصابی قوت $\frac{و}{۲}$ ہے جو گ میں سے عمل کرتی ہے۔ اِس لیے ۲، ۳ انتصابی اور $\frac{و}{۲}$ کے مساوی کھینچو۔ پھر ۳، ۴ اور ۴، ۵ مساوی $\frac{و}{۲}$ کے اور علی الترتیب زنجیر دع اور ع ف کے متوازی کھینچو۔ تب ۳، ۵ مساوی ہوگا ق کے اور اگر ۴، ۶ کو ف اور لا کے درمیان کی زنجیر کے متوازی اور $\frac{و}{۲}$ کے مساوی کھینچا جائے تو ۵، ۶ سے $ق_۲$ تعبیر ہوگا۔

قطب لا کو نقطہ ۰ پر لینے اور پہلی کڑی کو $ق_۱$ پر منطبق کرنے سے دباؤ کے خط پر نقطہ ا حاصل ہوگا۔ اب ا ب، ب ج، ج د علی الترتیب متوازی (۰، ۳)، (۰، ۵)، (۰، ۶) کے کھینچو۔ نقطہ د نقطہ ا میں کے افقی خط پر واقع ہوگا کیونکہ پھر کی مسند کی وجہ سے $ر_ا$ افقی ہونا چاہیے۔ اب د کو ب سے ملانے سے ب پر کے ردِّ عمل $ر_ب$ کی سمت حاصل ہوگی اور سمتی شکل پر (۶، ۷) اور (۰، ۷) علی الترتیب $ر_ا$ اور $ر_ب$ کے متوازی کھینچنے سے ردِّ عملوں کی قیمت حاصل ہوگی۔ تب اگر ک حمالہ کے مرکزی خط پر کوئی نقطہ ہو اور اس پر کی تراش کھینچی جائے جو دباؤ کے خط کو ل پر ملے، تو ل بوجھ نقطہ ہوگا اور اگر ۰، ۵ کو ک ل کے متوازی اور علی القوایم تحلیل کرنے سے اجزائے تحلیلی س اور ص حاصل ہوں تو اس تراش پر جزی قوت س ہوگی، دھکیل ص اور خماؤ کا معیار ص × ک ل ہوگا۔

متحرک بوجھوں، ثابت شہتیروں، اور مسلسل شہتیروں کے خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے اور مختلف تعمیروں کے دباؤ کے خط آیندہ ابواب میں ملینگے۔

مختلف قسم کے شہتیروں کے لیے اعظم خماؤ کے معیار اور جز کا ایک خلاصہ صفحہ ۳۷۲ پر ملیگا۔

چھٹا باب

شہتیروں کے زور

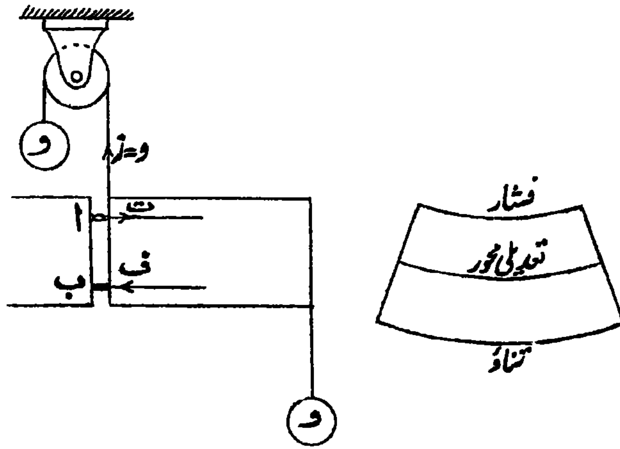
ہم گزشتہ باب میں دیکھ چکے ہیں کہ ایک شہتیر مختلف طرحوں سے لدا ہوا ہو تو اس کے طول کے مختلف نقاط پر خماؤ کا معیار اور جزی قوت کس طرح معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ اب ہم کو یہ معلوم کرنا ہے کہ ان مقداروں میں اور شہتیر میں پیدا ہونے والے زوروں میں کیا ربط ہوتا ہے۔

شہتیروں میں پیدا ہونے والے زوروں کا ایک اچھا تصور پروفیسر پیری[1] کے بنائے ہوئے ایک نمونے پر غور کرنے سے حاصل ہوگا۔ فرض کرو کہ ایک شہتیر ایک سرے پر ثابت ہے اور اس کے دوسرے سرے پر ایک وزن و ہے (شکل ع۶۱)، اور شہتیر کو ایک خاص تراش پر کاٹ دیا گیا ہے۔ تب وائیں حصے کو اس طرح تعادل میں رکھ سکتے ہیں کہ اس کے اوپر ایک رسی کو باندھ کر چرخی پر سے گزاریں اور اس کے دوسرے سرے سے ایک وزن و لٹکائیں اور تراش کے نچلے حصے کو ایک کندہ ب لگائیں اور بالائی حصے کو ایک زنجیر ا۔ تب رسی کا تناؤ جزی قوت کا مقابلہ کریگا اور کندہ ب ایک فشاری قوت ف کو اور زنجیر ا ایک تنشی قوت ت کو

---

[1] Prof: Perry

برداشت کریگی۔ چونکہ افقی قوتیں بس یہی ہیں۔ اس لیے یہ مساوی اور مخالف ہونگی اور اس طرح اِن سے ایک جفت بنیگا۔ اور اِس جفت کا معیار اُس



شکل ۶۸۔ شہتیروں کے زور

جفت کے مساوی اور مخالف ہونا چاہیے جو لداؤ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے اور جس کو خماؤ کے معیار کا نام دیا گیا ہے۔

کسی حقیقی شہتیر میں جو انصراف واقع ہوگا اس کی وجہ سے ایک پہلو کا مادّہ کھنچیگا اور دوسرے پہلو کا سکڑ جائیگا۔ اِس طرح دونوں پہلوؤں کے درمیان کسی مقام پر مادّہ بالکل بے فساد رہیگا اور شہتیر کی تراش میں جس محور پر فساد صفر ہوتا ہے اس کو تعدیلی محور (ت۔م) کہتے ہیں۔ اس طرح دیکھو:۔ تعدیلی محور شہتیر کی تراش کا وہ خط ہے جس پر فساد واقع نہیں ہوتا اور اس طرح زور بھی واقع نہیں ہوتا۔

شہتیر کے رُوکار میں بھی صفر فساد اور زور کا ایک خط ہوگا جس کو بھی ایک تعدیلی محور کہا جاسکتا ہے۔ یہ دونوں محور دراصل ایک تعدیلی سطح کے نقش ہیں۔

اگر ہم کو یہ معلوم ہو جائے کہ تعدیلی محور سے شہتیر کے بیرونی پہلو تک فساد کس طرح بدلتا ہے تو چونکہ ہم کو زور اور فساد کا ربط معلوم ہے اور یہ معلوم ہے کہ مجموعی فشاری زور مجموعی تنشی زور کے مساوی ہونا چاہیے اور ان کے جفت کا معیار خماؤ کے معیار کے مساوی ہونا چاہیے اس لیے ہم کو شہتیر کے مختلف نقاط پر زور معلوم ہو جائینگے۔ زوروں کے جفت کا معیار اکثر مزاحمت کا معیار کہا جاتا ہے۔

معمولی شہتیر کے نظریے کے مفروضات ــــ شہتیروں کے خماؤ کے متعلق ہم پہلے ذیل کے مفروضات بیان کرینگے اور پھر ان مفروضات سے اس اعظم زور میں جو کسی تراش میں خماؤ سے پیدا ہو اور خماؤ کے معیار میں ربط معلوم کرینگے:۔

(ا) یہ کہ زیر غور شے میں زور، فساد کے متناسب ہے اور یہ کہ ینگ کا مقیاس (ے) تناؤ اور فشار کے لیے ایک ہی ہے۔

(ب) یہ کہ شہتیر کی جو تراش شہتیر کی خمیدگی سے پہلے مستوی ہو خمیدگی کے بعد بھی مستوی رہتی ہے۔

(ج) یہ کہ شہتیر کا ابتدائی نصف قطر انحنا اس کے تراشی ابعاد کے مقابلے میں بہت بڑا ہے۔

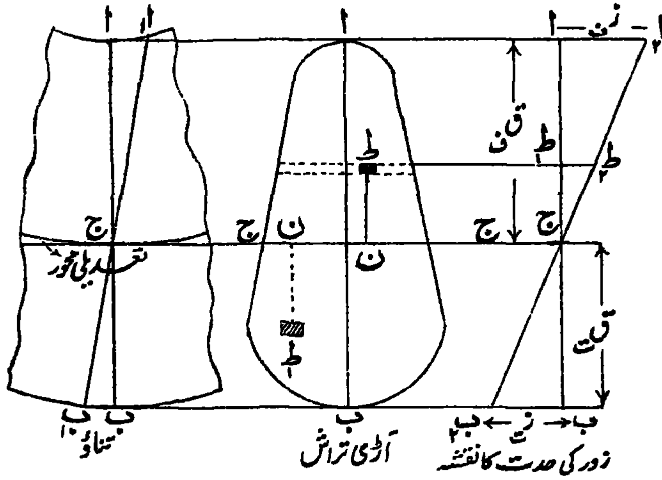
نیز فی الحال ہم بحث کو سادہ خماؤ تک محدود رکھینگے، یعنی اُس صورت تک جس میں حسب ذیل شرائط پوری ہوتی ہیں:۔

(۱) شہتیر کی تراش پر کوئی حاصل دھکیل یا کھینچ نہیں۔

(۲) شہتیر کی تراش اپنے مرکز ہندسی میں سے گزرنے والے اُس محور کے گرد تشاکل ہے جو اُس مستوی کے متوازی ہے جس میں خماؤ واقع ہوتا ہے۔

شہتیروں کے زوروں کا صحیح اندازہ حاصل کرنے کے لیے یہ بالکل ضروری ہے کہ کسی خاص نظریے کی بحث میں جو مفروضات شریک ہوتے ہیں اُن کے صحیح مفہوم اور نتائج پر ان مفروضات کا جو اثر ہوتا ہے وہ ذہن نشین ہو۔

فرض کرو کہ ا ب (شکل ۶۹) ایک ایسے شہتیر کی تراش کو تعبیر



شکل ۶۹۔ شہتیروں کے زور

کرتا ہے جو خم ہو چکا ہے (خمیدگی کی مقدار شکل میں مبالغے کے ساتھ دکھائی گئی ہے)۔ خمیدگی سے پہلے خط ا ب کا محل ا۱ ب۱ تھا۔ اِس طرح ب ب۱ اعظم تنشی فساد کو اور ا ا۱ اعظم فشاری فساد کو تعبیر کرتا ہے۔ ہمارے مفروضہ (ب) کی رُو سے جو برنولی کا مفروضہ کہلاتا ہے ا۱ ب۱ اور ا ب دونوں خطوطِ مستقیم ہونگے۔ تعدیلی محور صفر فساد کے نقطہ ج میں سے گزریگا اور اوپر کے مفروضوں سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ فساد تعدیلی محور سے فاصلے کے متناسب ہونگے۔ مفروضہ (ل) سے حاصل ہوتا ہے کہ زور کی حدت کا نقشہ بھی ایک خطِ مستقیم ا۲ ب۲ ہوگا اور ب۲ ج اور ج ا۲ ایک سیدھ میں ہونگے کیونکہ ینگ کا مقیاس تناؤ اور فشار میں ایک ہی ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ فشار اور تناؤ کے اعظم زور نقاط ا اور ب پر ہونگے۔ فرض کرو کہ یہ علی الترتیب زف اور زت ہیں، اور فاصلے ا ج اور ب ج علی الترتیب قف اور قت ہیں۔

تعدیلی محور کا محل —— تعدیلی محور سے فاصلہ ط ن پر نقطہ ط پر کے ایک چھوٹے سے رقبے ب پر غور کرو۔ ط پر زور ط۱ط۲ ہوگا۔

لیکن ط۱ط۲ / ط۱ج = ا۱ا۲ / ا۱ج = زف / قف

∴ ط۱ط۲ = (زف / قف) × ط۱ج

= (زف / قف) × ط ن

∴ اس چھوٹے رقبے پر زور = ب × (زف / قف) × ط ن

∴ تراش کے اس پورے رقبے پر زور جو تعدیلی محور کے اوپر ہے

= ∑ ب × (زف / قف) × ط ن

= (زف / قف) ∑ ب × ط ن

= (زف / قف) × تعدیلی محور کے اوپر کے رقبے کا پہلا معیار تعدیلی محور کے گرد۔

اسی طرح ایک نقطہ ط۱ پہ کے چھوٹے رقبے پر غور کرنے سے حاصل ہوگا کہ

تعدیلی محور کے نیچے تراش پر مجموعی زور

= (زت / قت) × تعدیلی محور کے نیچے کے رقبے کا پہلا معیار تعدیلی محور کے گرد۔

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ مجموعی تناؤ = مجموعی فشار کے مساوی

ہونا چاہیے' اور مفروضات (ا) اور (ب) سے لازم آتا ہے کہ

$$\frac{نف}{قف} = \frac{نت}{قت}$$

اس لیے لازم آتا ہے کہ تعدیلی محور کے گرد تعدیلی محور کے اوپر اور نیچے کے رقبوں کے معیار مساوی اور مختلف العلامت ہونگے یعنی تعدیلی محور کے گرد تراش کے پورے رقبے کا مجموعی پہلا معیار صفر ہو۔ لیکن ہم کو معلوم ہے کہ کسی رقبے کا پہلا معیار ایسے خط کے گرد صفر ہوتا ہے جو مرکزِ ہندسی میں سے گزرے۔

اِس لیے سادہ خماؤ میں اختیار کردہ مفروضات کے تحت' تعدیلی محور مرکزِ ہندسی میں سے گزریگا۔

مزاحمت کا معیار —— (م۔م)۔ ہم نے ثابت کیا ہے کہ کسی نقطہ ط پر کے چھوٹے رقبے پ پر زور ب × $\frac{نف}{قف}$ × طن ہوتا ہے۔

ت۔ م کے گرد اِس زور کا معیار

= زور × طن

= ب × $\frac{نف}{قف}$ × طن^2

∴ تراش پر کے تمام زوروں کا مجموعی معیار

= ∑ ب × $\frac{نف}{قف}$ × طن^2

= $\frac{نف}{قف}$ ∑ (ب × طن^2)

$$= \frac{\text{ز}_{\text{ف}}}{\text{ق}_{\text{ف}}} \times (\text{ت - ر کے گرد پورے رقبے کا دوسرا معیار})$$

$$= \frac{\text{ز}_{\text{ف}}}{\text{ق}_{\text{ف}}} \times \text{آ}$$

لیکن تمام زوروں کا مجموعی معیار اُس جفت کا معیار ہے جو مزاحمت کا معیار کہلاتا ہے۔ اس لیے دیکھو

$$\text{ر - ر} = \frac{\text{ز}_{\text{ف}}}{\text{ق}_{\text{ف}}} \times \text{آ} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ز}_{\text{ت}}}{\text{ق}_{\text{ت}}} \times \text{آ}$$

اور یہ پہلے دکھایا جاچکا ہے کہ مزاحمت کا معیار خماؤ کے معیار کے مساوی ہونا چاہیے جسے ہم صرف ر سے تعبیر کرینگے۔

اِس طرح $$\text{ر} = \frac{\text{ز}_{\text{ف}}}{\text{ق}_{\text{ف}}} \times \text{آ} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ز}_{\text{ت}}}{\text{ق}_{\text{ت}}} \times \text{آ} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

اب دیکھو آ، $\text{ق}_{\text{ف}}$، اور $\text{ق}_{\text{ت}}$ صرف تراش کی شکل پر منحصر ہیں، اور $\frac{\text{آ}}{\text{ق}_{\text{ف}}}$ اور $\frac{\text{آ}}{\text{ق}_{\text{ت}}}$ کو تراش کا علی الترتیب فشاری مقیاس اور تنشی مقیاس کہتے ہیں اور حروف $\text{مق}_{\text{ف}}$ اور $\text{مق}_{\text{ت}}$ سے تعبیر کرتے ہیں۔

اِس طرح ہم کو یہ ربط حاصل ہوتا ہے

$$\text{ر} = \text{ز}_{\text{ف}}\ \text{مق}_{\text{ف}} = \text{ز}_{\text{ت}}\ \text{مق}_{\text{ت}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

عملاً ہم کو $\text{ز}_{\text{ف}}$ اور $\text{ز}_{\text{ت}}$ مطلوب ہونگے جو کہ تراش پر کے اعظم زوروں کو تعبیر کرتے ہیں۔ اِس لیے ہم اس ربط کو یوں لکھینگے :-

$$ز_{ق} = \frac{م}{مق_{ق}} \quad \text{.........} \quad (۳)$$

$$ز_{ت} = \frac{م}{مق_{ت}} \quad \text{.........} \quad (۴)$$

جس صورت میں کہ تراش ت۔ م کے گرد متشاکل ہو $ق_{ق}$ اور $ق_{ت}$ مساوی ہونگے اور اِس طرح $مق_{ق}$ اور $مق_{ت}$ مساوی ہونگے۔ اِس صورت میں $ز_{ق} = ز_{ت}$ اور اوپر کے ربط کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$ز = \frac{م}{مق}$$

عددی مثالیں

ذیل کی عددی مثالوں سے واضح ہو جائیگا کہ شہتیر معلومہ طور پر لدے ہوئے ہوں تو ان میں زور کس طرح معلوم کیے جا سکتے ہیں اور ایک دیے ہوئے فصل اور تراش کے شہتیر کے لیے بے خطر بوجھ کس طرح معلوم کیا جا سکتا ہے۔

(۱) شکل ۷۰ میں دی ہوئی پانچ تراشوں ا، ب، ج، د، ع میں سے ہر ایک کا رقبہ ۴ مربع انچ ہے۔ اگر شہتیر ایک ہی فصل کے اور ایک ہی شے کے ہوں تو اِن تراشوں کی مضبوطیوں کا مقابلہ کرو۔

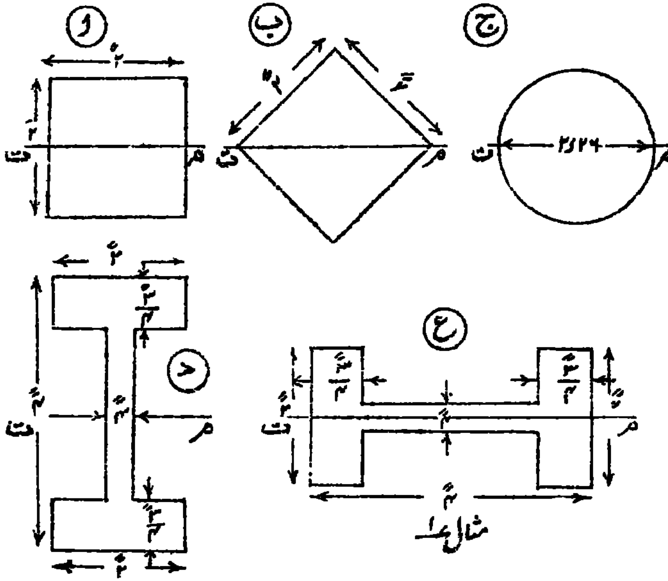
ہم دیکھ چکے ہیں کہ م = ز مق۔ اب اگر سب شہتیر ایک ہی طور پر لدے ہوئے ہوں تو م اُن کے بوجھ کے متناسب ہوگا اور چونکہ ز ہر ایک کے لیے ایک ہی ہے اس لیے ان تراشوں کے شہتیروں کی اضافی مضبوطیاں ان تراشوں کے مقیاسوں کے متناسب ہونگی۔ دوسرے معیاروں کی جدول کے لیے دیکھو صفحہ $\frac{۱۰۶}{۱۰۷}$۔

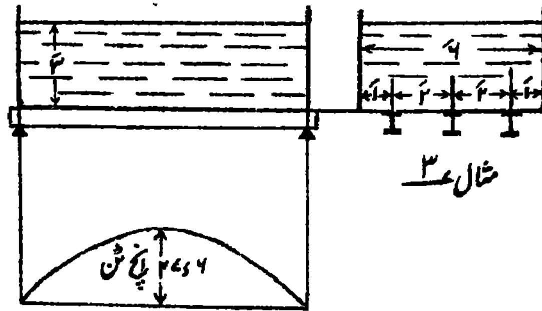
تراش ا

$$آ = \frac{ص ھ^{۳}}{۱۲} = \frac{۲ \times ۲^{۳}}{۱۲}$$

$$\text{مق} = \frac{\text{آ}}{\text{ق}} = \frac{\text{آ}}{\text{ا}}$$

$$\therefore \text{مق} = \frac{۴^۲ \times ۲}{۱ \times ۱۲} = \frac{۸ \times ۲}{۱۲} = ۱٫۳۳ \text{ انچ اکائیاں}$$





ہر ایک گرڈر پر دباؤ کا معیار

شکل عث۔ شہتیروں کی مثالیں

تراش ب ـ یہ دو مثلثوں سے مرکب ہے۔

$\text{آ} = ۲ \times \frac{\text{ض ھ}^{۳}}{۱۲}$ (ھ اس صورت میں مثلث کا ارتفاع ہے)

$\therefore \quad \text{آ} = \frac{۲ \times ۲٫۸۲۸ \times (۱٫۴۱۴)^{۳}}{۱۲}$

$\text{ق} = ۱٫۴۱۴$

$\therefore \quad \text{مق} = \frac{۲ \times ۲٫۸۲۸ \times (۱٫۴۱۴)^{۳}}{۱۲ \times ۱٫۴۱۴} = \frac{۲٫۸۲۸}{۳}$

$= ٫۹۴۳$ انچ اکائیاں

تراش ج ـ

$\text{آ} = \frac{\pi\, \text{ق}^{۴}}{۶۴} = \frac{\pi \times (۲٫۲۶)^{۴}}{۶۴}$

$\text{ق} = ۱٫۱۳$

$\therefore \quad \text{مق} = \frac{\pi \times (۲٫۲۶)^{۴}}{۶۴ \times ۱٫۱۳} = ۱٫۱۳$ انچ اکائیاں

تراش د ـ

$\text{آ} = \frac{۲ \times (۴)^{۳}}{۱۲} - \frac{۲ \times ۰٫۸ \times (۲٫۵)^{۳}}{۱۲}$

$= ۱۰٫۶۷ - ۲٫۰۸ = ۸٫۵۹$

$\text{ق} = \frac{۴}{۲}$

$\therefore \quad \text{مق} = \frac{۸٫۵۹}{۲} = ۴٫۲۹$ انچ اکائیاں

تراش ع ـ یہ تین مستطیلوں سے مرکب ہے۔

$\text{آ} = \frac{٫۷۵ \times (۲)^{۳}}{۱۲} + \frac{۲٫۵ \times (٫۴)^{۳}}{۱۲} + \frac{٫۷۵ \times (۲)^{۳}}{۱۲}$

$= ٫۵ + ٫۰۱۳ + ٫۵$

= ۱٫۰۱۳

ق = اَ

∴ مق = ۱٫۰۱۳ انچ اکائیاں

اس طرح دیکھو تراشوں کی ترتیب مضبوطی کے لحاظ سے د، ا، ج، ع، ب ہے۔ یعنی تراش د مضبوط ترین ہے پھر ا وغیرہ۔

اس کو بطور ایک قاعدہ کلیہ کے یاد رکھو کہ ایک دی ہوئی تراش کا مضبوط ترین شہتیر وہ ہے جس کی گہرائی اتنی زیادہ ہو جتنی کہ ممکن ہے اور جس میں مادّے کی ممکنہ مقدار باہر کی جانب مرتکز ہے۔

(۲) ۲۰ فٹ فصل کے ایک گرڈر پر ۱۰ ٹن کا ایک پھیلا ہوا بوجھ اور ۴ ٹن کا ایک مرکزی بوجھ ہے۔ اس کے لیے ایک موزوں برطانوی معیاری شہتیری تراش معلوم کرو جس میں اعظم زور ۷ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہ ہو۔

اعظم خماؤ کا معیار یکساں بوجھ کی وجہ سے و ل/۸ ہوگا (دیکھو شکل ۵۴، صورت ۲، ۳) یعنی

= ۱۲ × ۲۰ × ۱۰ / ۸ انچ ٹن

= ۳۰۰ انچ ٹن

اعظم خماؤ کا معیار مرکزی بوجھ کی وجہ سے = و ل/۴

= ۱۲ × ۲۰ × ۴ / ۴

= ۲۴۰ انچ ٹن

یہ دونوں ایک ہی مقام پر واقع ہونگے اس لیے دونوں بوجھوں کی وجہ سے اعظم خماؤ کا معیار = ۵۴۰ انچ ٹن

اب م = ز مق

∴ ۵۴۰ = ۷ مق

یعنی مق = ۵۴۰/۷ = ۷۷٫۱۴ انچ اکائیاں

معیاری تراشوں کی جدول سے (جو درج ضمیمہ ہے) معلوم ہوگا کہ جس تراش کا مقیاس اس سے قریب ترین ہے وہ ۱۴ × ۶ × ۵۷ پونڈ والی تراش ہے جس کے لیے مق = ۱۲٫۷۶ اور یہ تراش کافی مضبوط ہے۔

(۳) ایک ٹانکی جس کا وزن ½ ٹن اور ناپ ۱۰ × ۶ × ۳ ہے پانی سے بھری ہوئی ہے اور تین گرڈروں پر رکھی ہوئی ہے جو طولاً رکھے گئے ہیں اور اس طرح ہر ایک گرڈر پر مساوی وزن پڑتا ہے اگر گرڈر ۶ × ۳ × ۱۲ پونڈ والے معیاری شہتیر ہوں تو ہر ایک میں اعظم زور معلوم کرو۔ (اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای فروری ۱۹۰۳ء خفیف سی تبدیلی کے ساتھ)۔

$$\text{ٹانکی میں پانی کا وزن} = \frac{62.5 \times 3 \times 6 \times 10}{2240} \text{ ٹن}$$

$$= 5.02 \text{ ٹن}$$

∴ $\text{گرڈروں پر مجموعی وزن} = 5.02 + 0.5 = 5.52 \text{ ٹن}$

∴ $\text{ہر ایک گرڈر پر اعظم خماؤ کا معیار} = \frac{5.52}{3} \times \frac{12 \times 10}{8}$

$$= 27.6 \text{ انچ ٹن}$$

۶ × ۳ × ۱۲ پونڈ والے شہتیر کے لیے مق = ۹٫۳۶ انچ اکائیاں

∴ $\text{ز} = \frac{27.6}{9.36} = 2.94 \text{ ٹن فی مربع انچ}$

(۴) ایک ڈھلے لوہے کا شہتیر مقلوب T کی شکل کا ہے جس کی مجموعی گہرائی ۹ انچ کور کی چوڑائی ۶ انچ، اور ریلیٹ اور کور کی موٹائی ۱ انچ ہے۔ اگر شہتیر کا طول ۱۲ فٹ ہو تو معلوم کرو کہ کس مرکزی بوجھ سے کور میں ۱ ٹن فی مربع انچ کا تنفسی زور پیدا ہوگا۔ اس وقت اعظم فشاری زور کیا ہوگا (اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای اکتوبر ۱۹۰۲ء)۔

پہلے تراشش کا مرکز ہندسی اور دوسرا معیار معلوم کرو (دیکھو شکل ۱۷۱)۔

تراش کا رقبہ = ب = ۹×۱ + ۵×۱ = ۱۴ مربع انچ

قاعدے کے گرد پہلا معیار = ب ق = (۹×۱) × ۹/۲ + (۲ ۱/۲ + ۲×۱) × ۱/۲

= ۴۰٫۵ + ۲٫۵ = ۴۳

∴ ق = ۴۳/۱۴ = ۳٫۰۷ انچ

قاعدے کے گرد دوسرا معیار = آ_ا = (۹)³×۱/۳ + (۱)³×۱/۲×۲/۳

= ۲۴۳ + ۱٫۶۷ = ۲۴۴٫۶۷

∴ مرکز ہندسی میں سے گزرنے والے متوازی خط کے گرد دوسرا معیار

= آ_ج = آ_ا − ب ق²

= ۲۴۴٫۶۷ − ۱۴ × (۳٫۰۷)²

= ۲۴۴٫۶۷ − ۱۳۲٫۰۷

= ۱۱۲٫۶ انچ اکائیاں

مق_ت = ۱۱۲٫۶/(۹ − ۳٫۰۷) = ۱۱۲٫۶/۵٫۹۳

= ۱۸٫۹۹ انچ اکائیاں

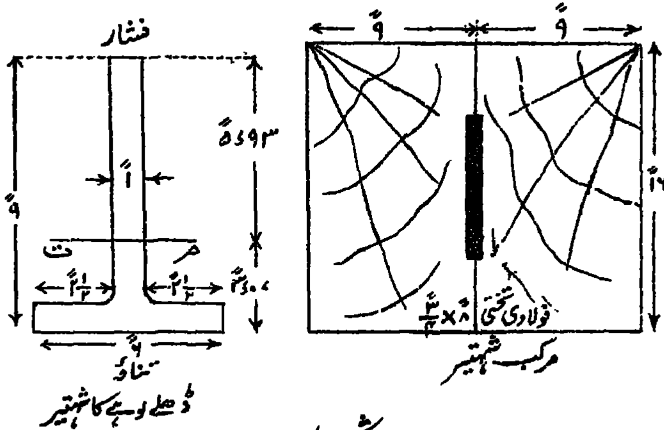
مق_ت = ۱۱۲٫۶/۳٫۰۷ = ۳۶٫۶۷ انچ اکائیاں

∴ تناؤ کے لحاظ سے بے خطر خاؤ کا معیار = زِ_ت × مق_ت = ۳۶٫۶۷ انچ ٹن

اگر مرکزی بوجھ و ہو تو شہتیر کے ذاتی وزن کو نظر انداز کرنے پر اعظم خاؤ کا معیار و ل/۴ ہوگا۔

∴ اعظم خاؤ کا معیار = و ل/۴ = و × ۱۲ × ۱۲/۴ = ۳۶ و انچ ٹن

$$\therefore\ و_{ب} = \frac{۳۶٫۶۷}{۳۶} = ۱٫۰۲\ \text{ٹن}$$



شکل ۱۷

$$\text{فشاری زور} = \frac{\text{نت} \times \text{قن}}{\text{قت}} = \frac{۱ \times ۵٫۹۳}{۳٫۰۷}$$

$$= ۱٫۹۳\ \text{ٹن فی مربع انچ}$$

(۵) ایک مرکب شہتیر دو چوبی شہتیروں سے مرکب ہے جن میں سے ہر ایک کی چوڑائی ۹ انچ اور گہرائی ۱۶ انچ ہے اور ان کے درمیان ایک فولادی تختی ۸ انچ گہری اور ¾ انچ موٹی متشاکلاً رکھ دی گئی ہے۔ اگر سے کی قیمت چوبینے کے لیے ۱٫۵ ملین پونڈ فی مربع انچ اور فولاد کے لیے ۳۰×۱۰^۶ پونڈ فی مربع انچ ہو تو فولادی تختی میں اعظم تنشی زور معلوم کرو جب کہ چوبینے میں اعظم تنشی زور ۱۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہو۔

نیز چوبینے کے اسی زور کی حالت کے لیے معلوم کرو کہ شہتیر کو

مرکب کرنے سے غیر مرکب شہتیر کے مقابلے میں کتنے فی صدی زیادہ بوجھ برداشت ہو سکتا ہے (بی۔ ایس۔ سی لندن ۱۹۰۷ء)۔

صفحہ ۱۰۴ پر دی ہوئی ترقیم اختیار کرنے سے $م = \frac{۳۰ \times ۱۰^{۶}}{۱٫۵ \times ۱۰^{۶}} = ۲۰$ (دیکھو شکل ۔۔۔)۔

∴ فولادی تختی ایک ۲۰ گنی چوڑی یعنی ۵ اً × ۸ً چوبی تختی کے معادل ہے۔
اس لیے پورے مرکب شہتیر کی معادل چوبی تراش کے لیے۔

$$آ_{۲} = \frac{۲ \times ۹ \times ۱۶^{۳}}{۱۲} + \frac{(۱۵ - \frac{۳}{۴}) \times ۸^{۳}}{۱۲}$$

$$= ۶۱۴۴ + ۶۰۸$$

$$= ۶۷۵۲ \text{ انچ اکائیاں}$$

اور بے احکام چوبی شہتیر کے لیے $آ = ۶۱۴۴$

جب کہ لکڑی میں زور تراش کے کنارے پر ۱۰۰۰ پونڈ فی مربع انچ ہو تو تعدیلی محور سے ۴ انچ نیچے یعنی معادل چوبی تختی کی اعظم گہرائی پر زور

$$\frac{۴}{۸} \times ۱۰۰۰ = ۵۰۰ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

ہوگا۔ لیکن ایک ہی فساد پر فولاد کا زور لکڑی سے ۲۰ گنا ہوتا ہے۔

∴ فولاد میں زور $= ۲۰ \times ۵۰۰ = ۱۰۰۰۰$ پونڈ فی مربع انچ

مرکب شہتیر کے لیے معادل مقیاس $\frac{۶۷۵۲}{۸} = ۸۴۴$ انچ اکائیاں

∴ بے خطر خماؤ کا معیار پونڈ فٹوں میں $= \frac{۱۰۰۰ \times ۸۴۴}{۱۲} = ۷۰۳۳۳$

سادہ چوبی شہتیر کے لیے مق $= \frac{۶۱۴۴}{۸} = ۷۶۸$ انچ اکائیاں

∴ بے خطر خماؤ کا معیار پونڈ فٹوں میں $= \frac{۱۰۰۰ \times ۷۶۸}{۱۲} = ۶۴۰۰۰$

∴ مزید خماؤ کا معیار جو مرکب شہتیر برداشت کرتا ہے $= ۶۳۳۳$

∴ اضافہ فی صدی $= \frac{۶۳۳۳}{۶۴۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۹٫۹$ فی صدی

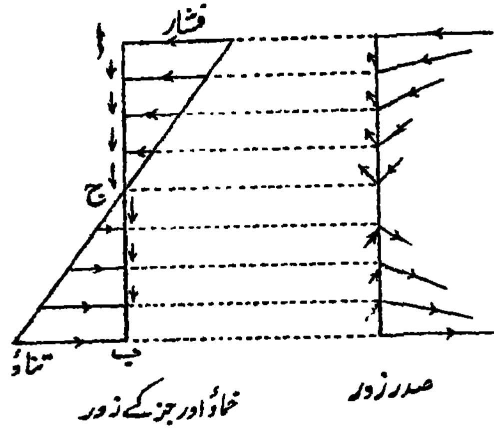
شہتیروں کے زوروں کے متعلق عددی مثالیں اس کتاب میں اور متعدد مقامات پر دی جائینگی۔

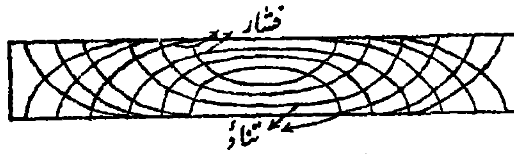
شہتیروں کے زوروں پر جزی قوت کا اثر ـــــ دیکھو

اب تک ہم نے صرف اُن تنشی اور فشاری زوروں پر غور کیا ہے جو خماؤ کے معیار سے پیدا ہوتے ہیں۔ لیکن ان زوروں کے علاوہ مماسی زور بھی ہوتے ہیں جو جزی قوت سے پیدا ہوتے ہیں۔ شہتیر کے کسی اندرونی نقطے پر حاصل زور ان راست اور مماسی زوروں کا حاصل یا صدر زور ہوتا ہے۔ اِس حاصل کو معلوم کرنے کا طریقہ باب ا میں دیا گیا ہے۔ ایک آیندہ باب میں ہم شہتیر کی تراش پر جزی زور کی تقسیم سے بحث کرینگے لیکن فی الحال یہ مان لینگے کہ جزی زور مرکزِ ہندسی پر اعظم ہوتا ہے اور انتہاؤں پر صفر ہوتا ہے۔ شکل ۲۷ میں شہتیر کی تراش پر جزی اور راست زوروں کا نقشہ دیا گیا ہے اور حاصل زور بھی دکھائے گئے ہیں جو دیکھو شہتیر کی انتہاؤں پر مرکزی خط کے متوازی ہیں اور مرکزِ ہندسی پر اس کے علی القوائم ہیں۔

اگر فصل کے مختلف نقاط پر کی تراشوں میں مختلف گہرائیوں پر صدر زور معلوم کیے جائیں اور صدر زور کی سمتوں کو ایک منحنی کے ذریعے ملا یا جائے تو مختلف خطوط حاصل ہونگے جن سے پتہ چلیگا کہ صدر زور کی سمت نقطہ بہ نقطہ کس طرح بدلتی رہتی ہے۔ اس طرح کے منحنی رنکین کی اطلاقی میکانیات میں ملینگے۔ ان کی شکل شکل ۲۷ کے مطابق ہوگی۔

عملاً یہ پایا جائیگا کہ ایسے شہتیروں کو چھوڑ کر جو بہت چھوٹے ہوں اور ان پر بھاری بوجھ ہوں عام طور پر خماؤ کے معیار سے پیدا ہونے والے اعظم تنشی اور فشاری زور اعظم جزی زور سے بہت بڑھے





شکل ۲۷ ب شہتیروں کے صدر زور

ہوئے ہونگے۔ اِس طرح بالعموم خماؤ کے معیار سے پیدا ہونے والے زوروں کی بحث جزی زوروں سے زیادہ اہم ہوتی ہے۔

ایسی صورتیں جن میں شہتیر کے نظریے کے مفروضات جائز نہیں۔

مزاحمت کا معیار عام صورت میں — شہتیروں کے صحیح نظریے کو قائم کرنے کے لیے یہ ضروری نہیں کہ اوپر بیان کیے ہوئے مفروضات اختیار کیے جائیں اور ہم اب سب میں عام صورت میں مزاحمت کا معیار معلوم کرینگے۔

اس کی تحقیق میں ہم کو یہ فرض کرنا ہوگا کہ تجربے کے ذریعے یا اَور کسی طرح معلوم ہے کہ شہتیر کی کسی تراش نے جو ابتداءً مستوی تھی بگاڑ کے بعد کیا شکل اختیار کی ہے۔ اور یہ بھی معلوم رہنا چاہیے کہ شہتیر جس شے کا بنا ہوا ہے اس کے لیے زور اور فساد میں کیا ربط ہے۔

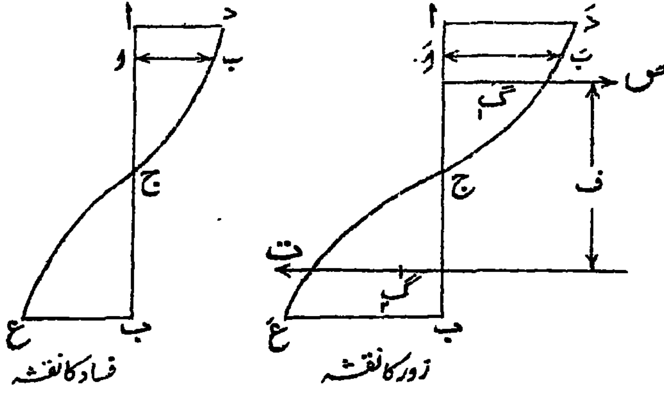
فرض کرو کہ ا ب (شکل ۱۲۳) ایک شہتیر کی تراش کے ابتدائی رُوکار کو تعبیر کرتا ہے جس نے فساد کے بعد شکل د ج ع اختیار کی ہے۔ تب "زور اور فساد" کے منحنی سے اور تراش کی شکل سے زور کا منحنی دَ جَ عَ کھینچا جا سکتا ہے۔ اس کو کھینچنے کا طریقہ حسب ذیل ہوگا:— فرض کرو کہ فساد کے نقشے کا کوئی معین ل ب ہے۔ تب "زور اور فساد" کے منحنی سے اس فساد کے متناظر زور معلوم کرو اور اس کو دیے ہوئے نقطے پر شہتیر کے عرض سے ضرب دو اور اس کو کسی موزوں پیمانے پر لَ بَ سے تعبیر کرو۔ بَ کے جیسے نقاط کو ملانے سے زور کا نقشہ حاصل ہوگا۔

اب فرض کرو کہ زور کے نقشے کے رقبے ص اور ت ہیں اور ان کے مرکز ہندسی گ اور گَ۔ تب سادہ خماؤ میں ص اور ت مساوی ہونگے اور اگر مراکزِ ہندسی کے درمیان عمودی فاصلہ ف ہو تو مزاحمت کا معیار ص × ف یا ت × ف ہوگا۔

اگر طلبہ شہتیروں کے زوروں کے متعلق اس عام طریقے کو اچھی طرح سمجھ جائیں تو اُن کو خصوصی نظریوں کے سمجھنے میں وہ دِقت محسوس نہ ہو جو اکثر محسوس ہوتی ہے۔ باب ۱۵ میں محکم کنکریٹ سے بحث کرتے وقت ہم ایسے خماؤ کے متعلق مزید نوٹ اور عددی مثالیں دینگے جس میں معمولی مفروضہ اختیار نہیں کیا جا سکتا۔

شہتیر جن میں ابتدائی انحنا قابل لحاظ ہو

——فرض کرو کہ ا ب د ع (شکل ۱۲۴) کسی منحنی شہتیر کے ایک چھوٹے ٹکڑے کو تعبیر کرتا ہے۔ ط مرکزِ انحنا ہے اور ا ع اور ب د وسطی خط ج جَ پر



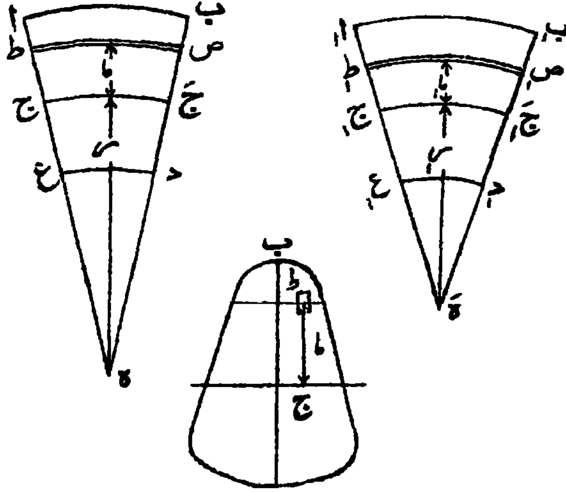
شکل ۷۳

عمود ہیں۔ تب ظاہر ہے کہ فساد اور زور کی ایک خاص حدت پیدا کرنے کے لیے ع د میں اتنا (جھوٹی) فساد درکار نہیں ہوگا جتنا کہ ا ب میں کیونکہ ع د کا ابتدائی طول ا ب سے کم ہے۔ اس طرح تعدیلی محور مرکز ہندسی میں سے نہیں گزریگا۔

یہ مفروضہ ہم اب بھی برقرار رکھینگے کہ زور اور فساد باہم متناسب ہیں اور نیز برنولی کا مفروضہ کہ جو تراش ابتدا میں مستوی تھی وہ خماؤ کے بعد بھی مستوی رہتی ہے۔ ان کی مدد سے منحنی شہتیروں کے خماؤ کا ایک صحیح نظریہ حاصل کیا جا سکتا ہے:۔

فرض کرو کہ حصہ ا ب د ع خماؤ کے بعد وضع اَ بَ دَ عَ اختیار کرتا ہے۔ مرکز ہندسی ہیں کے خط جَ سے فاصلہ ما پر ایک نقطہ ط پر سے ایک چھوٹے سے رقبے یہ پر اور شہتیر کے ایک ریشے ط ص پر

غور کرو جو رقبہ بہ میں سے گزرتا ہے۔



شکل ۷۴۔ خمدار شہتیروں کے زور

فساد کے بعد ریشہ ط ص نئے مرکزِ ہندسی کے خط ج جَ سے فاصلہ ما پر وضع ط۱ ص۱ اختیار کرتا ہے۔

$$\text{تب ط ص میں فساد کی حدت} = \frac{\text{ط}_1\text{ص}_1 - \text{طص}}{\text{طص}}$$

اور اگر ط پر زور ز۱ ہو تو

$$\frac{\text{ز}_1}{\text{ے}} = \frac{\text{ط}_1\text{ص}_1 - \text{طص}}{\text{طص}} = \frac{\text{ط}_1\text{ص}_1}{\text{طص}} - 1$$

$$\therefore \frac{\text{ط}_1\text{ص}_1}{\text{طص}} = 1 + \frac{\text{ز}_1}{\text{ے}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{اسی طرح ج جَ میں فساد کی حدت} = \frac{\text{ج}_1\text{جَ}_1 - \text{ججَ}}{\text{ججَ}}$$

اور اگر مرکزِ ہندسی پر زور ز ہو تو اسی طرح

$$\frac{ج_1 \bar{ج}_1}{ج \bar{ج}} = 1 + \frac{ز}{ے} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

(۱) کو (۲) سے تقسیم کرنے سے:-

$$\frac{ط_{ص_1} \times ج \bar{ج}}{ج_1 \bar{ج}_1 \times ط_ص} = \frac{1 + \frac{ز_1}{ے}}{1 + \frac{ز}{ے}}$$

لیکن

$$\frac{ط_{ص_1}}{ج_1 \bar{ج}_1} = \frac{ل_1 + م}{م} = 1 + \frac{ل_1}{م}$$

$$\frac{ج_1 \bar{ج}_1}{ط_ص} = \frac{م}{ل + م} = \frac{1}{1 + \frac{ل}{م}}$$

نیز چونکہ $\frac{ز_1}{ے}$ اور $\frac{ز}{ے}$ بہت چھوٹی مقداریں ہیں، اس لیے اس طرح لکھا جا سکتا ہے:-

$$\frac{1 + \frac{ز_1}{ے}}{1 + \frac{ز}{ے}} = \left(1 - \frac{ز}{ے} + \frac{ز_1}{ے}\right)$$

اِس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1 + \frac{ل_1}{م_1}}{1 + \frac{ل}{م}} = 1 - \frac{ز}{ے} + \frac{ز_1}{ے} \quad \ldots\ldots (۳)$$

$$\frac{ز}{ے} = \frac{ز_1}{ے} + 1 - \frac{1 + \frac{ل_1}{م_1}}{1 + \frac{ل}{م}}$$

$$= \frac{ز_1}{ے} + \frac{\frac{ل}{م} - \frac{ل_1}{م_1}}{1 + \frac{ل}{م}}$$

$$= \frac{\text{ز}_{\text{ا}}}{\text{ے}} - \frac{\frac{\text{ا}}{\text{س}} - \frac{\text{ا}_{\text{ا}}}{\text{س}}}{\frac{\text{ا}}{\text{س}} + 1} \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$\therefore \quad \text{ز}_{\text{ا}} = \text{ز} + \frac{\text{ے}\left(\frac{\text{ا}}{\text{س}} - \frac{\text{ا}_{\text{ا}}}{\text{س}}\right)}{\frac{\text{ا}}{\text{س}} + 1} \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

پوری تراش پر قوت $\sum \text{ز}_{\text{ا}} \times \text{بہ}$ ہوگی جو خالص خماؤ کی صورت میں صفر ہوگی۔

$$\therefore \quad 0 = \sum \text{ز}_{\text{ا}} \times \text{بہ}$$

$$= \sum \text{ز} \times \text{بہ} + \sum \frac{\text{ے}\left(\frac{\text{ا}}{\text{س}} - \frac{\text{ا}_{\text{ا}}}{\text{س}}\right)}{\left(\frac{\text{ا}}{\text{س}} + 1\right)} \times \text{بہ}$$

لیکن $\sum \text{ز} \times \text{بہ} = \text{ز} \sum \text{بہ} = \text{ز}\,\text{ب}$

$$\therefore \quad \text{ز} = -\frac{\text{ے}}{\text{ب}} \sum \frac{\left(\frac{\text{ا}}{\text{س}} - \frac{\text{ا}_{\text{ا}}}{\text{س}}\right)}{\left(\frac{\text{ا}}{\text{س}} + 1\right)} \times \text{بہ} \quad \cdots\cdots (6)$$

رقبے کے چھوٹے ٹکڑے پر کی قوت کا معیار ج ج کے گرد $= \text{ز}_{\text{ا}} \times \text{بہ} \times \text{ا}$ اور اِن معیاروں کا حاصل جمع مزاحمت کے معیار کے اور اِس طرح خماؤ کے معیار م کے مساوی ہوگا۔

$$\therefore \quad \text{م} = \sum \text{ز}_{\text{ا}} \times \text{ا} \times \text{بہ}$$

$$= \sum \text{ز} \times \text{بہ} \times \text{ا} + \sum \frac{\text{ے}\left(\frac{\text{ا}}{\text{س}} - \frac{\text{ا}_{\text{ا}}}{\text{س}}\right)}{\left(\frac{\text{ا}}{\text{س}} + 1\right)} \times \text{بہ}\,\text{ا}$$

لیکن $\sum \text{ز}\,\text{بہ}\,\text{ا} = \text{ز} \sum \text{بہ}\,\text{ا} = \text{ز} \times$ رقبے کا پہلا معیار مرکزِ ہندسی کے گرد

$$= \text{ز}\text{ب} \times ۰ = ۰$$

$$\therefore \quad \text{م} = \text{ح} \frac{\text{ے}\left(\frac{\text{ما}}{\text{ر}_1} - \frac{\text{ما}}{\text{ر}}\right)}{\left(1 + \frac{\text{ما}}{\text{ر}}\right)} \times \text{ب} \times \text{ما} \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

یہ عام ترین صورت ہے اور اختیار کردہ مفروضے کے لیے صحیح ہے۔

اب ذیل کی خاص صورتوں پر غور کرو:

(۱) معمولی سیدھا شہتیر، ر لامتناہی، ر۱ بہت بڑا۔

اِس صورت میں $\text{ز} = \frac{\text{ے}}{\text{ب}} \text{ح} \frac{\text{ما}}{\text{ر}_1} \times \text{ب}$

$$= \frac{\text{ے}}{\text{ر}_1 \text{ب}} \text{ح} \, \text{ما} \, \text{ب} = ۰$$

اِس طرح $\quad \text{م} = \text{ح} \frac{\text{ے}}{\text{ر}_1} \times \text{ما} \, \text{ما} \, \text{ب}$

لیکن ما تقریباً ما کے مساوی ہے

$$\therefore \quad \text{م} = \frac{\text{ے}}{\text{ر}_1} \text{ح} \, \text{ما}^2 \text{ب}$$

$$= \frac{\text{ے} \text{آ}}{\text{ر}_1}$$

اور مساوات (۵) سے $\text{ز}_{\text{ما}} = ۰ + \frac{\text{ے} \, \text{ما}}{\text{ر}_1}$

$$= \frac{\text{ے} \times \text{ما}}{\text{ر}_1}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ے}}{\text{ر}_1} = \frac{\text{ز}_{\text{ما}}}{\text{ما}}$$

$$\therefore \quad \text{م} = \frac{\text{ز}_{\text{ما}} \text{آ}}{\text{ما}}$$

اور یہی نتیجہ پہلے حاصل ہوا تھا۔

(۲) زنجیر کی کڑیوں وغیرہ کے لیے وِنکلر[۱] کا ضابطہ :۔

وِنکلر نے اِس امر کی طرف توجہ منعطف کرائی کہ زنجیر کی کڑیوں وغیرہ جیسی چیزوں پر جن میں کہ ابتدائی انحنا قابلِ لحاظ ہے خماؤ کے معمولی ضابطوں کا استعمال درست نہیں اور اِس نے اِن ضابطوں میں حسب ذیل ترمیم کی :۔

اس نے ما = ما لیا

تب مساوات (۵) حسبِ ذیل ہوگئی :۔

$$\text{ن}_{\text{ما}} = \text{ن}_{\text{ی}} + \frac{\text{ے} \times \text{ما}\left(\frac{1}{\text{ر}_1} - \frac{1}{\text{ر}}\right)}{1 + \frac{\text{ما}}{\text{ر}}}$$

$$= \text{ن}_{\text{ی}} + \text{ے}\left(\frac{1}{\text{ر}_1} - \frac{1}{\text{ر}}\right) \times \frac{\text{ما}\,\text{ر}}{\text{ما} + \text{ر}} \quad \cdots\cdots\cdots (۸)$$

تب مساوات (۶) سے

$$\text{ن}_{\text{ی}} = -\frac{\text{ے}}{\text{ب}}\left(\frac{1}{\text{ر}_1} - \frac{1}{\text{ر}}\right) \text{ع}\left(\frac{\text{ما}\,\text{ر}}{\text{ما} + \text{ر}}\right) \times \text{بہ}$$

اس میں $\text{ع}\left(\frac{\text{ما}\,\text{ر}}{\text{ما} + \text{ر}}\right) \times \text{بہ} = \text{ع}\,\text{ما}\,\text{بہ} - \text{ع}\left(\frac{\text{ما}^2}{\text{ما} + \text{ر}}\right) \times \text{بہ}$

$$= 0 - \text{ع}\left(\frac{\text{ما}^2}{\text{ما} + \text{ر}}\right) \times \text{بہ}$$

اب فرض کرو کہ $\text{ع}\left(\frac{\text{ر} \times \text{ما}^2}{\text{ما} + \text{ر}}\right) \times \text{بہ} = \text{ب}\,\text{ھ}^2$

جہاں ھ اِس ربط سے معیّن ہوتا ہے اور اس کو کوڑی کا نصف قطر

[۱] Winkler

کہا جاسکتا ہے۔ یہ معمولی صورت میں یہ گردشی نصف قطر کے متناظر ہے۔

اس طرح دیکھو $\frac{ب ھ^2}{ر} = \Sigma\left(\frac{ا^2}{ا+ر}\right)\times یہ$

$= \Sigma \frac{ا ر}{ا+ر}\times یہ$

$\therefore \quad \Sigma\left(\frac{ا}{ا+ر}\right)\times یہ = \frac{ب ھ^2}{ر^2}$

اس طرح $ز = \frac{ے}{ب}\left(\frac{1}{ر_1}-\frac{1}{ر}\right)\frac{ب ھ^2}{ر}$

یعنی $ز = \frac{ے ھ^2}{ر}\left(\frac{1}{ر_1}-\frac{1}{ر}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$

مساوات (۷) سے

$م = \Sigma \frac{ے\left(\frac{1}{ر_1}-\frac{1}{ر}\right)}{\frac{ا}{ر}+1}\times ا^2 یہ$

$= ے ر\left(\frac{1}{ر_1}-\frac{1}{ر}\right)\Sigma\frac{ا^2 یہ}{ر+ا}$

$= ے\left(\frac{1}{ر_1}-\frac{1}{ر}\right)\Sigma\frac{ر ا^2}{ر+ا}\times یہ$

$= ے ب ھ^2\left(\frac{1}{ر_1}-\frac{1}{ر}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$

اب مساوات (۸) پر واپس آئیں تو

$ز_ا = \frac{ے ھ^2}{ر}\left(\frac{1}{ر_1}-\frac{1}{ر}\right) + ے\left(\frac{1}{ر_1}-\frac{1}{ر}\right)\frac{ا ر}{ا+ر}$

$= \frac{م}{ر\times ب} + \frac{م ا}{ب ھ^2}\times\left(\frac{ر}{ر+ا}\right)$ [له] $\ldots\ldots (11)$

له - یہ صرف خمیدگی کا زور ہے۔ ہم ٹکڑوں کی صورت میں اس راست زور کو بھی جمع کرنا ہوگا جو پوری تراش پر عمل کرتا ہے۔

مستطیلی تراش ــــ اگر تراش مستطیلی ہے اور اس کی گہرائی گ اور عرض ض ہے تو دیکھو ریاضی کی رُو سے تحلیل کرنے سے :ــ

$$\text{ب ھ}^{\text{۲}} = \int_{-\frac{\text{گ}}{\text{۲}}}^{+\frac{\text{گ}}{\text{۲}}} \frac{\text{ر ا}^{\text{۲}} \times \text{ض فرا}}{\text{ا} + \text{ر}}$$

اِس میں $\int \frac{\text{ا}^{\text{۲}}\,\text{فرا}}{\text{ا}+\text{ر}} = \int \text{ا فرا} - \int \frac{\text{ر ا}}{\text{ا}+\text{ر}}\,\text{فرا}$

$$= \int \text{ا فرا} - \int \text{ر فرا} + \int \frac{\text{ر}^{\text{۲}}\,\text{فرا}}{\text{ا}+\text{ر}}$$

$$= \frac{\text{ا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} - \text{ر ا} + \text{ر}^{\text{۲}}\,\text{لوک}_{\text{و}}(\text{ا}+\text{ر})$$

$$\therefore \text{ب ھ}^{\text{۲}} = \left[\frac{\text{ا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} - \text{ر ا} + \text{ر}^{\text{۲}}\,\text{لوک}_{\text{و}}(\text{ا}+\text{ر})\right]_{-\frac{\text{گ}}{\text{۲}}}^{+\frac{\text{گ}}{\text{۲}}} \times \text{ر ض}$$

$$= \text{ض ر}\left[\text{۰} - \text{ر گ} + \text{ر}^{\text{۲}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{۲ر}+\text{گ}}{\text{۲ر}-\text{گ}}\right]$$

$$= \text{ض ر}^{\text{۲}}\left[\text{ر لوک}_{\text{و}}\frac{\text{۲ر}+\text{گ}}{\text{۲ر}-\text{گ}} - \text{گ}\right]$$

$$\therefore \text{ز}_{\text{ا}} = \frac{\text{م}}{\text{ر ب}} + \text{م} \times \text{ا} \times \left(\frac{\text{ر}}{\text{ا}+\text{ر}}\right) \times \frac{\text{۱}}{\text{ض ر}^{\text{۲}}\left[\text{ر لوک}_{\text{و}}\frac{\text{۲ر}+\text{گ}}{\text{۲ر}-\text{گ}} - \text{گ}\right]}$$

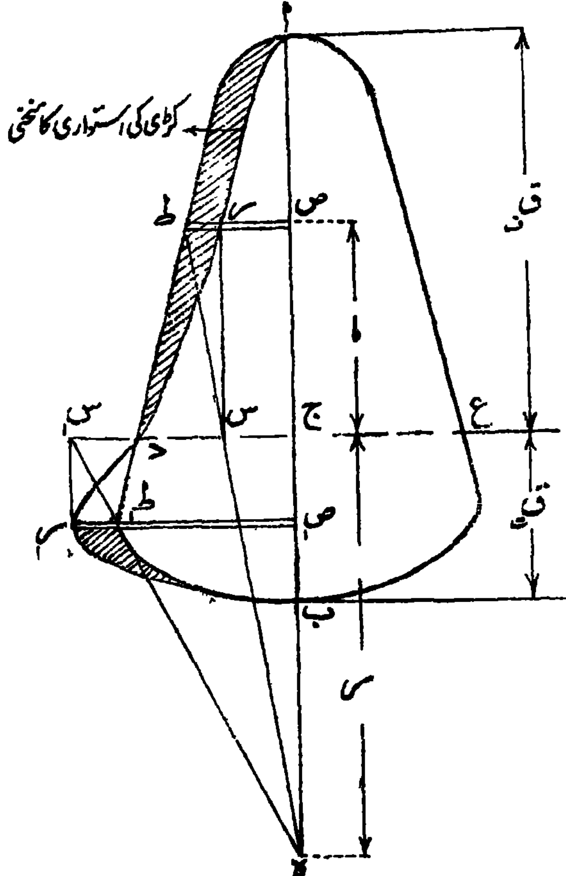
$$= \frac{\text{م}}{\text{ر}}\left\{\frac{\text{۱}}{\text{ب}} + \frac{\text{ا}}{\text{ض}(\text{ر}+\text{ا})\left(\text{ر لوک}_{\text{و}}\frac{\text{۲ر}-\text{گ}}{\text{۲ر}+\text{گ}} - \text{گ}\right)}\right\}$$

یہ اعظم ہوگا جب کہ $\text{ا} = \pm \frac{\text{گ}}{\text{۲}}$

عام ترسیمی حل ـــــ فرض کرو کہ شکل ۷۵ ایک شہتیر کی تراش ادبع کو تعبیر کرتی ہے۔ شہتیر خماؤ کے مستوی میں خمدار ہے اور مرکزی خط دع کا مرکزِ انحنا ہ ہے۔ نصف تراش کی ایک پتلی پٹی ط ص پر غور کرو جو ج د سے فاصلہ ما پر ہے۔ ط ہ کو ملاؤ جو ج د کو س پر کاٹے اور ص ج کے متوازی س ر کھینچو جو ط ص کو ر پر کاٹے۔

$$\text{تب}\quad \frac{ط ر}{ط ص} = \frac{ر س}{ص ہ} = \frac{۱}{ر + ۱}$$

اس عمل کو ط ص جیسی کئی پٹیوں پر کریں اور حاصل شدہ نقاط کو ملائیں تو ایک منحنی ا ر د ر ب حاصل ہوتا ہے جس کو کڑی کی استواری کا منحنی کہا جاتا ہے۔



شکل ۷۵ ۔ منحنی شہتیر، وغیرہ

تب کڑی کی استواری کے منحنی کا رقبہ $= ب_ی = ع \left(\frac{ا}{س+ا}\right) \times ب$

لیکن　$\frac{ب ھ^2}{س^2} = ع \left(\frac{ا}{س+ا}\right) ب$

$\therefore$　$ب_ی = \frac{ب ھ^2}{س^2}$

اب فرض کرو کہ　$\frac{ب_ی}{ب} = ک$

یعنی　$ب ھ^2 = ب \times ک \times س^2$

اب زور کی مساوات (۱۱) میں ان قیمتوں کو درج کرنے سے

$$ز_ا = \frac{م}{س \times ب} + \frac{م ا \times س}{ب \times ک \times س^2 (س+ا)}$$

$$= \frac{م}{ب}\left\{\frac{1}{س} + \frac{ا}{س ک (س+ا)}\right\}$$

$$= \frac{م}{ب س}\left\{1 + \frac{ا}{ک (س+ا)}\right\}$$

تب اگر خط د ع سے انتہائی فشاری اور تنشی ریشوں کے فاصلے علی الترتیب $ق_ف$ اور $ق_ت$ ہوں تو

اعظم فشاری زور $= ز_ف = \frac{م}{ب س}\left\{1 + \frac{ق_ف}{ک (س + ق_ف)}\right\}$

اعظم تنشی زور $= ز_ت = \frac{م}{ب س}\left\{\frac{ق_ت}{ک (س - ق_ت)} - 1\right\}$

تعدیلی محور کا محل —— ا کی جس قیمت سے $ز_ا = ۰$ اس سے تعدیلی محور کا فاصلہ خط د ع سے حاصل ہوگا۔ یعنی

$$\frac{\text{ما}}{\text{ک}\,(\text{ر}+\text{ما})} = -1$$

یا $\text{ما} = -\text{ک}\,\text{ر} - \text{ک}\,\text{ما}$

یا $\text{ما} = -\dfrac{\text{ک}\,\text{ر}}{1+\text{ک}}$

اس سے تعدیلی محور کا محل معلوم ہوتا ہے۔

(۳) اینڈریوز و پیرسن کا ضابطہ[1] — مصنف کتاب ہذا اور پروفیسر کارل پیرسن نے ایک مضمون شائع کیا ہے جس میں یہ دکھایا گیا کہ وِنکلر کے ضابطے میں ایک مزید اصلاح کی ضرورت ہے کیونکہ عرضی فساد کی وجہ سے یہ صحیح نہیں کہ $\text{ما} = \text{ما}$

اِس صورت میں یہ ضابطہ زیادہ پیچیدہ ہوجاتا ہے لیکن زور ایک ترسیمی طریقے سے حاصل ہو سکتے ہیں جو وِنکلر کے طریقے سے زیادہ دِقت طلب نہیں۔ مذکورۂ بالا مضمون میں تجربے سے ثابت کیا گیا ہے کہ اس طریقے سے جو ضابطے حاصل ہوتے ہیں وہ خماؤ کے معمولی ضابطوں سے بہت زیادہ صحیح ہوتے ہیں۔

پروفیسر گڈمین۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای کے ایک بعد کے مضمون سے اِن تجربات کے نتائج کی تصدیق ہوتی ہے اور اس مضمون کے نتائج اینڈریوز و پیرسن کے تجربات کے نتائج کے تقریباً بالکل مطابق ہیں۔ ہم گنجائش کی کمی کی وجہ سے اس کی مزید تفصیل سے مجبور ہیں۔ طالب علم اگر اس مسئلے سے تفصیلی بحث کرنا چاہیں تو ان مضامین کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔

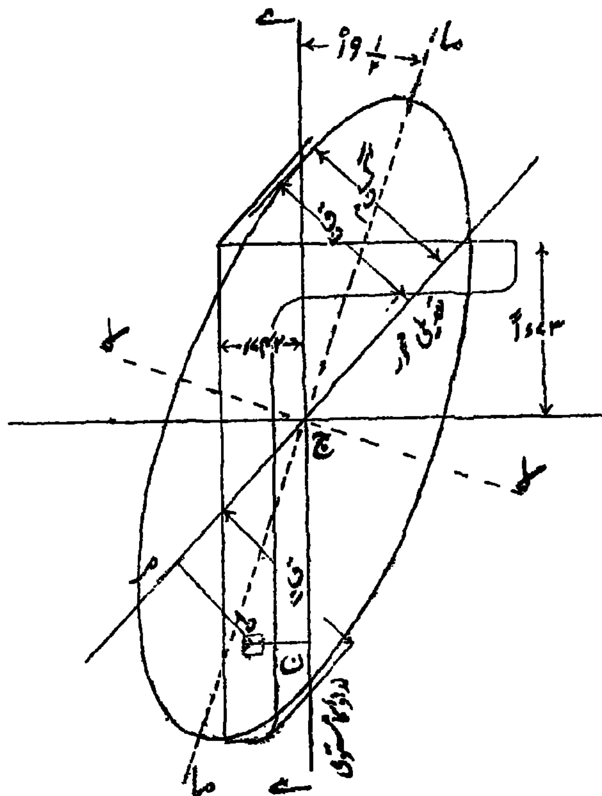
شہتیر جن پر لداؤ صدر محور پر مائل ہو۔

شہتیر کے زوروں کے ضابطے حاصل کرتے وقت ہم نے فرض کیا کہ "شہتیر کی تراش ایک ایسے محور کے گرد متشاکل ہے جو تراش کے مرکزِ ہندسی میں سے گزرتا ہے اور خماؤ کے مستوی کے متوازی ہے"۔

[1] Andrews-Pearson

معیارِ جمود یعنی دوسرے معیار کی بحث میں ہم نے دیکھا ہے کہ تراش کا کوئی محور تشاکل ہو تو وہ ایک صدر محور کہلائیگا۔ اس شرط ہمارے مفروضے کے معنے یہ ہوئے کہ ایک صدر محور شہتیر کے لداؤ کے مستوی میں واقع ہوتا ہے۔

اگر کسی صورت میں ایسا نہ ہو تو حسب ذیل عمل کیا جائیگا۔ شہتیر کا معیاری ناقص کھینچو۔ لالا اور ما ما (شکل ۷۶) صدر محور ہیں۔ اور فرض کرو کہ لداؤ کے مستوی کا نقش (Trace) سے سے ہے۔ تب تعدیلی محور ناقص کا وہ قطر ہوگا جو لداؤ کے مستوی کا مزدوج ہے۔ خماؤ کا مستوی تعدیلی محور کے علی القوائم ہوگا۔



شکل ۷۶ ـ غیر تشاکل تراشوں کے زور

اِس کو یوں ثابت کیا جاسکتا ہے :—

تراش کے نقطہ ط پر ایک چھوٹے سے رقبے پر غور کرو (شکل ۷۶) اور فرض کرو کہ ط ن اور ط م علی الترتیب لداؤ کے مستوی اور تعدیلی محور کے علی القوائم کھینچے گئے ہیں۔ تب ط پر زور کی حدت تعدیلی محور سے فاصلہ ط م کے متناسب ہوگی۔ اس طرح اگر س ایک مستقل ہو تو زط = س × ط م لکھ سکتے ہیں۔

اِس لیے اِس رقبے پر کے بوجھ کا معیار ے ے کے گرد

= زط × بہ × ط ن = س × بہ × ط م × ط ن

اب چونکہ ے ے لداؤ کا مستوی ہے اس لیے تراش پر کے تمام زوروں کا معیار ے ے کے گرد صفر ہونا چاہیے کیونکہ زوروں کا جفت بھی مستوی ے ے کے اندر ہوگا۔

∴ Σ زط × بہ × ط ن = ۰

یا Σ س × بہ × ط م × ط ن = ۰

یا Σ بہ × ط م × ط ن = ۰

لیکن Σ بہ × ط م × ط ن کو حاصل ضرب معیار کہا گیا ہے اور یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ اگر کسی رقبے کا حاصل ضرب معیار دو خطوط کے گرد صفر ہو تو یہ خطوط ایک ناقص کے مزدوج قطر ہونگے۔

اس لیے تعدیلی محور معلوم کرنے کے لیے ے ے کا مزدوج قطر کھینچ لو۔ اور یہ اس طرح کیا جاسکتا ہے کہ ے ے کے متوازی ایک وتر کھینچا جائے اور اس کی تنصیف کرکے نقطۂ تنصیف کو ج سے ملایا جائے۔

اب فرض کرو کہ ت۔ م کے گرد گردشی نصف قطر گم ہے اور فشاری اور تنشی جانبوں کے انتہائی نقطوں کے فاصلے اس اس سے قف اور قت ہیں۔

تب مقیاس حسبِ ذیل ہونگے:۔

$$\text{مق}_{\text{ن}} = \frac{\text{ب گ}^{2}_{\text{م}}}{\text{ق}_{\text{ن}}} = \frac{\text{آ}_{\text{ت م}}}{\text{ق}_{\text{ن}}}$$

$$\text{مق}_{\text{ت}} = \frac{\text{ب گ}^{2}_{\text{م}}}{\text{ق}_{\text{ت}}} = \frac{\text{آ}_{\text{ت م}}}{\text{ق}_{\text{ت}}}$$

اور اعظم فشاری اور تنشی زور حسبِ ذیل ربطوں سے حاصل ہونگے:۔

$$\text{ز}_{\text{ن}} = \frac{\text{م}}{\text{مق}_{\text{ن}}}$$

$$\text{ز}_{\text{ت}} = \frac{\text{م}}{\text{مق}_{\text{ت}}}$$

عددی مثال — ایک ″۵ × ″۳ × ″½ کی نامساوی زاویئی تراش کو چھوٹے پہلو پر لادا گیا ہے اور بڑا پہلو نیچے کی طرف ہے۔ ۷ ٹن فی مربع انچ زور کے لیے بے خطر خماؤ کا معیار معلوم کرو۔

معیاری تراشوں کی جدولوں سے حاصل ہوتا ہے کہ اس تراش کے لیے گردشی نصف قطر کی اعظم اور اقل قیمتیں ۱٫۶۹ اور ۰٫۶۵ انچ ہونگی۔ صدر محور انتصابی خط ے ے سے ۱۹½° کا زاویہ بنائیگا۔ خط ے ے لداؤ کے مستوی کا نقش ہے۔

اب معیاروں کا ناقص (شکل ۷۶ کے دُگنے پیمانے پر) کھینچا جائیگا۔ محورِ اعظم $\text{گ}_{\text{لالا}}$ کا دُگنا اور محورِ اصغر $\text{گ}_{\text{ما}}$ کا دُگنا ہوگا۔

ساخت کا جو طریقہ اس سے پہلے دیا گیا ہے اس کی مدد سے ناقص ے ے کا مزدوج قطر حاصل ہوگا۔ یہ تبدیلی محور ہوگا۔ $\text{گ}_{\text{م}}$ حاصل کرنے کے لیے ناقص کا ایک مماس حت ہ ر کے متوازی کھینچو اور ج سے ایک خط اس محور پر عمود وار کھینچو۔ اس کا طول ۰٫۸۸ انچ پایا جائیگا۔ اب تبدیلی محور سے تراش کے انتہائی نقطوں کے فاصلے $\text{ق}_{\text{ن}}$ اور $\text{ق}_{\text{ت}}$ ناپو۔ یہ علی الترتیب ۱٫۸۰ اور ۱٫۸۳ انچ پائے جائینگے۔ تراش کا رقبہ

۳٫۷۵ مربع انچ ہے۔ اِس طرح دیکھو

$$\text{مق}_{\text{ق}} = \frac{۳٫۷۵ \times ۰٫۸۸^{۲}}{۱٫۸۰} = ۱٫۶۱ \text{ انچ اکائیاں}$$

$$\text{مق}_{\text{ت}} = \frac{۳٫۷۵ \times ۰٫۸۸^{۲}}{۱٫۸۳} = ۱٫۵۹ \text{ انچ اکائیاں}$$

∴ اگر بے خطر زور = زن = زپ = ۷ ٹن فی مربع انچ

تو بے خطر خماؤ کا معیار = ۷ × ۱٫۵۹ = ۱۱٫۱۳ انچ ٹن .... (۱)

اگر ت۔م لداؤ کے مستوی کے علی القوائم لیا جاتا جیسا کہ متشاکل شہتیر کی صورت میں ہوتا تو گ = ۱٫۶۰ ، قِ ق = ۱٫۷۳ اور قِ ت = ۳٫۲۷ حاصل ہوتا۔ اِن سے

$$\text{مق}_{\text{ق}} = \frac{۳٫۷۵ \times ۱٫۶۰^{۲}}{۱٫۷۳} = ۵٫۴۶ \text{ انچ اکائیاں}$$

$$\text{مق}_{\text{ت}} = \frac{۳٫۷۵ \times ۱٫۶۰^{۲}}{۳٫۲۷} = ۲٫۹۴ \text{ انچ اکائیاں}$$

∴ بے خطر خماؤ کا معیار = ۷ × ۲٫۹۴ = ۲۰٫۵۸ انچ ٹن (۲)

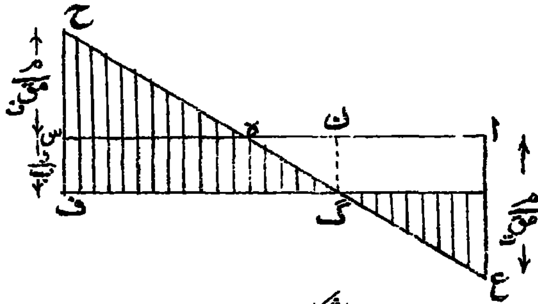
[نوٹ۔ بے خطر خماؤ کا معیار معلوم کرنے کے لیے اگر کامی زور تناؤ اور فشار میں مساوی ہوں تو صریحاً صرف اقل مقیاس پر غور کیا جائیگا۔]

نتائج (۱) اور (۲) کا مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ حقیقی تعدیلی محور نہ معلوم ہونے سے بہت بڑی غلطی واقع ہوتی ہے۔ عملی مجوزوں سے یہ غلطی اکثر سرزد ہوتی ہے۔

اِسی قسم کی رعایت اُن متشاکل تراشوں میں بھی ملحوظ رکھنی چاہیے جن کا ایک صدر محور لداؤ کے مستوی پر منطبق نہ ہو۔ ایسی صورتیں عملاً تختی دار گرڈروں میں واقع ہوتی ہیں جب کہ بوجھ گزر رہا ہو اور ہوا ایک طرف سے چل رہی ہو اور نیز ڈھلواں پلوں میں جن میں آڑے گرڈروں کی کوریں اسی ڈھال پر رکھی جاتی ہیں جو صدر گرڈروں کا ہوتا ہے۔

خماؤ کے زور اور راست زور ایک ساتھ —— اگر شہتیر پر لداؤ

اس طرح کا ہو کہ خماؤ کے زوروں کے علاوہ راست زور بھی پیدا کرے تو



شکل ۱۷۷

خماؤ کا زور اور راست زور ملا ہوا

تراش کے کسی نقطے پر حاصل زور کی مقدار ان علٰحدہ زوروں کو جمع کرنے سے ملیگی۔ فرض کرو کہ ا س (شکل ۱۷۷) ایک شہتیر کی کسی تراش کا رُو کار ہے۔ تراش کا مرکزِ ہندسی ک ہے۔ رقبہ ب اور فشاری اور تنشی مقیاس مق اور مق ہیں۔ فشاری پہلو س ہے اور تنشی پہلو ا۔

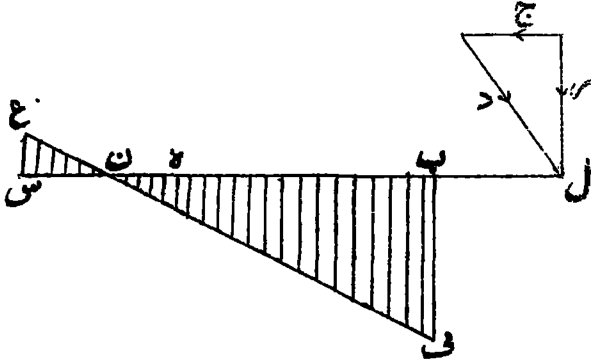
تب اگر راست قوت ایک دباؤ د ہو تو تراش پر ایک یکساں فشاری زور $\frac{د}{ب}$ ہوگا۔ اگر خماؤ کا معیار م ہو تو خماؤ سے پیدا ہونے والے اعظم فشاری اور تنشی زور علی الترتیب $\frac{م}{مق}$ اور $\frac{م}{مق}$ ہونگے۔ اس طرح

$$\text{حاصل اعظم فشاری زور} = ز = \frac{د}{ب} + \frac{م}{مق} \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\text{حاصل اعظم تنشی زور} = ز = \frac{م}{مق} - \frac{د}{ب} \quad \ldots\ldots (۲)$$

تراش پر اس مرکب زور کی تقسیم شکل ۱۷۷ کے مطابق ہوگی۔

ف ح اعظم فشاری زور کو تعبیر کرتا ہے اور گ ع اعظم تنشی زور کو۔ تعدیلی محور نقطہ ن پر ہوگا جہاں کہ زور صفر ہے۔



شکل ۸۲

اگر راست قوت دباؤ د کی بجائے تناؤ ت ہو تو

$$\text{حاصل اعظم تنشی زور} = ز_ت = \frac{ت}{ب} + \frac{م}{مو_ت} \quad \ldots\ldots (۳)$$

$$\text{حاصل اعظم فشاری زور} = ز_ن = \frac{م}{مو_ن} - \frac{ت}{ب} \quad \ldots\ldots (۴)$$

زور دباؤ کے خط سے حاصل کرنا ــــ اگر تراش پر حاصل قوت س ہو (شکل ۸۲) اور دباؤ کا خط س ب مخروجہ کو بوجہ نقطہ ل پر قطع کرے (دیکھو صفحہ ۱۸۱) تو س کو تراش کے متوازی اور علی القوائم تحلیل کرنے سے ایک جزی قوت ج اور ایک دباؤ د حاصل ہوگا۔

اِس صورت میں م = د × ہ ل = د × لا

اور اگر ہ س = ق~س~ اور ہ ب = ق~ب~

تو $$\text{م}_{\text{ق}_\text{ن}} = \frac{\text{آ}}{\text{ق}_\text{ن}} = \frac{\text{ب گ}^2}{\text{ق}_\text{ن}}$$

$$\text{م}_{\text{ق}_\text{ت}} = \frac{\text{آ}}{\text{ق}_\text{ت}} = \frac{\text{ب گ}^2}{\text{ق}_\text{ت}}$$

جہاں گ ایک ایسے خط کے گرد گردشی نصف قطر ہے جو مرکزِ ہندسی میں سے تعدیلی محور کے متوازی گزرتا ہے۔

اس لیے مساواتوں (۱) اور (۲) سے :—

$$\text{ز}_\text{ن} = \frac{\text{د}}{\text{ب}} + \frac{\text{د} \times \text{لا} \times \text{ق}_\text{ن}}{\text{ب گ}^2}$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{ب}}\left(1 + \frac{\text{لا ق}_\text{ن}}{\text{گ}^2}\right) \qquad (۵)$$

$$\text{ز}_\text{ت} = \frac{\text{د} \times \text{لا} \times \text{ق}_\text{ت}}{\text{ب گ}^2} - \frac{\text{د}}{\text{ب}}$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{ب}}\left(\frac{\text{لا ق}_\text{ت}}{\text{گ}^2} - 1\right) \qquad (۶)$$

یا اگر حاصل عادی جزوِ تحلیلی ایک تناؤ ت ہو تو مساواتوں (۳) اور (۴) سے:—

$$\text{ز}_\text{ت} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}}\left(1 + \frac{\text{لا ق}_\text{ت}}{\text{گ}^2}\right) \qquad (۷)$$

$$\text{ز}_\text{ن} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}}\left(\frac{\text{لا ق}_\text{ن}}{\text{گ}^2} - 1\right) \qquad (۸)$$

تعدیلی محور کا محل — تعدیلی محور کا محل ن حسب ذیل طریقے پر معلوم ہوسکتا ہے:—

فرض کرو کہ یہ ط سے فاصلہ ما پر ہے۔

تب خماؤ کی وجہ سے زور = $\frac{م \cdot ما}{آ}$

$= \frac{د \times لا \times ما}{ب\ گ^{۲}}$

اس نقطے پر خماؤ کا زور راست زور کے بالکل مساوی ہوگا

∴ $\frac{د\ لا\ ما}{ب\ گ^{۲}} = \frac{د}{ب}$

یا $لا\ ما = گ^{۲}$

یعنی $ما = \frac{گ^{۲}}{لا}$ .... (۹)

ذیل کی عددی مثالوں سے مخلوط راست زور اور خماؤ کے زور کا مسئلہ صاف ہوجائیگا۔ مزید مثالیں اس کتاب کے اندر مختلف مقامات پر آئینگی۔

عددی مثالیں ــــ (۱) ایک تناؤ سلاخ ایک چپٹی سلاخ ہے جو ۸ انچ چوڑی اور ۱ انچ موٹی ہے۔ ٹھیک طور پر نہ بٹھائی جانے کی وجہ سے کھینچ کا خط سلاخ کے ہندسی محور میں سے گزرنے کی بجائے اس سے $\frac{۱}{۴}$ انچ ہٹ کر اُس مستوی کے اندر واقع ہوتا ہے جو سلاخ کی موٹائی کی تنصیف کرتا ہے۔ اگر کھینچ ۳۶ ٹن ہو تو کھینچ کے خط کے علی القوائم کسی تراش میں اعظم اور اقل زور معلوم کرو۔ ایک نقشے کے ذریعے تراش پر زور کی حقیقی تقسیم دکھاؤ۔ (بی۔ ایس سی لنڈن ۱۹۰۸ء)۔

اس صورت میں راست زور = $\frac{ت}{ب} = \frac{۳۶}{۱ \times ۸} = ۴.۵$ ٹن فی مربع انچ

اور خماؤ کا معیار = ت × لا اور دوسرا معیار (معیارِ جمود) = $\frac{۱ \times (۸)^{۳}}{۱۲} = \frac{۱۲۸}{۳}$

∴ $گ^{۲} = \frac{آ}{ب} = \frac{۱۲۸}{۳} \times \frac{۱}{۸} = \frac{۱۶}{۳}$

$$\therefore \quad \text{ز}_{\text{ت}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}}\left(\text{۱} + \frac{\text{لاقت}}{\text{گ}^{\text{۲}}}\right)$$

$$= \text{۴٫۵}\left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{۴}} \times \text{۴} \times \frac{\text{۳}}{\text{۱۶}}\right)$$

$$= \text{۴٫۵} \times \text{۱}\frac{\text{۳}}{\text{۱۶}} = \text{۵٫۳۴۴} \quad \text{ٹن فی مربع انچ}$$

$$\text{ز}_{\text{ت}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب}}\left(\text{۱} - \frac{\text{لاقت}}{\text{گ}^{\text{۲}}}\right)$$

$$= \text{۴٫۵}\left(\text{۱} - \frac{\text{۳}}{\text{۱۶}}\right)$$

$$= -\text{۴٫۵} \times \frac{\text{۱۳}}{\text{۱۶}} = -\text{۳٫۶۵۷} \quad \text{ٹن فی مربع انچ}$$

زور کی تقسیم شکل ۶۹ء کے مطابق ہوگی۔

(۲) ایک کھوکھلے مدّور ستون کو ایک بریکیٹ لگا ہوا ہے جس پر ۱ ٹن کا بوجھ رکھا ہوا ہے۔ اس بوجھ کا مرکز ستون کے مرکز سے ۲ فٹ کے فاصلہ پر ہے۔ ستون کا بیرونی قطر ۱۰ انچ ہے اور موٹائی ۱ انچ۔ اعظم فشاری زور کیا ہوگا۔ (اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای۔ اکتوبر ۱۹۰۸ء)۔

اس صورت میں $\text{ب} = \frac{\pi}{\text{۴}}\left(\text{۱۰}^{\text{۲}} - \text{۸}^{\text{۲}}\right) = \text{۲۸٫۲۸}$

$$\text{آ} = \frac{\pi}{\text{۶۴}}\left(\text{۱۰}^{\text{۴}} - \text{۸}^{\text{۴}}\right) = \text{۲۸۹٫۸} \quad \text{انچ اکائیاں}$$

$$\therefore \quad \text{گ}^{\text{۲}} = \frac{\text{۲۸۹٫۸}}{\text{۲۸٫۲۸}} = \text{۱۰٫۲۵}$$

$$\therefore \quad \text{ز}_{\text{ن}} = \frac{\text{د}}{\text{ب}}\left(\text{۱} + \frac{\text{لاقت}}{\text{گ}^{\text{۲}}}\right)$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲۸٫۲۸}}\left(\text{۱} + \frac{\text{۵} \times \text{۲۴}}{\text{۱۰٫۲۵}}\right)$$

$$= \frac{\text{۱۲٫۷}}{\text{۲۸٫۲۸}} = \text{۰٫۴۴۸} \quad \text{ٹن فی مربع انچ}$$

$$\text{ز}_{\text{ت}} = \frac{\text{د}}{\text{ب}}\left(\text{۱} - \frac{\text{لاقت}}{\text{گ}^{\text{۲}}}\right)$$

$$= \frac{۱۰٫۶۷}{۲۸٫۲۸} = ٫۳۷۹$$ ٹن فی مربع انچ

ت - م کا فاصلہ تراش کے مرکز سے $ا = \frac{گ^۲}{لا}$

$$= \frac{۱۰٫۲۵}{۲۴} = ٫۴۲۷$$ انچ

زوروں کی تقسیم شکل ۹۷ میں دکھائی گئی ہے۔

(۳) ایک ساختی حمالہ کا بازو ایک خمدار گرڈر کی شکل کا ہے، اور قاعدے کے قریب ایک افقی تراش ایک کھوکھلا مستطیل ہے۔ اِس مستطیل کے بیرونی ابعاد ۵۴ انچ × ۳۶ انچ ہیں اور بڑے اور چھوٹے ضلعوں کی موٹائی علی الترتیب ۱ انچ اور ۲ انچ ہے۔ اگر حمالہ کے سرے سے ۲۵ ٹن کا بوجھ لٹکایا جائے جس کا فاصلہ تراش کے مرکز سے ۵۰ فٹ ہو تو اعظم تنشی اور فشاری زور معلوم کرو جو مادے میں پیدا ہوگا۔ ایک نقشے کے ذریعے تراش پر زور کی حالت کے تغیرات دکھاؤ۔ (بی۔ ایس سی لندن ۱۹۰۵ء)۔

دیکھو اِس سوال میں مستطیل کی تختیوں کے جوڑنے والے ارکان کا ذکر نہیں کیا گیا۔ عملاً ان ارکان کی ضرورت ہوگی۔

گزشتہ مثال کی طرح عمل کرنے سے:-

$$ب = ۲ \times ۷۲ + ۱ \times ۱۰۰ = ۲۴۴$$ مربع انچ

$$آ = \frac{(۵۴)^۳ \times ۳۶}{۱۲} - \frac{(۵۰)^۳ \times ۳۴}{۱۲} = ۱۱۸۲۰۰$$

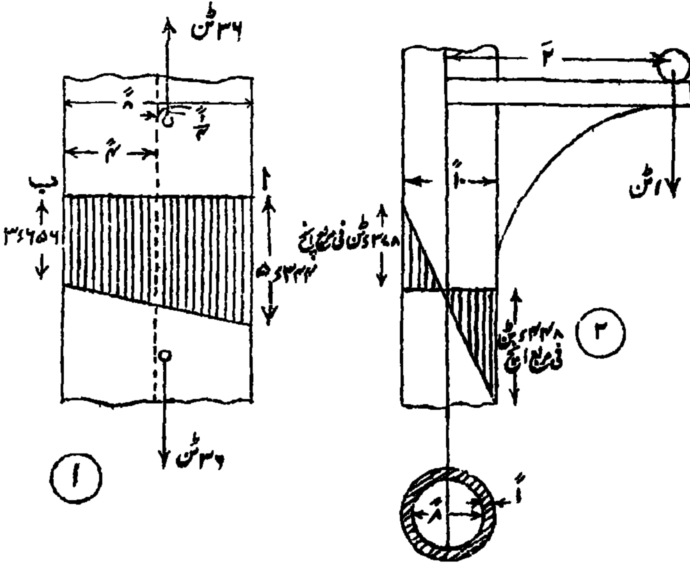
$$\therefore \quad گ^۲ = \frac{۱۱۸۲۰۰}{۲۴۴} = ۴۸۴٫۵$$

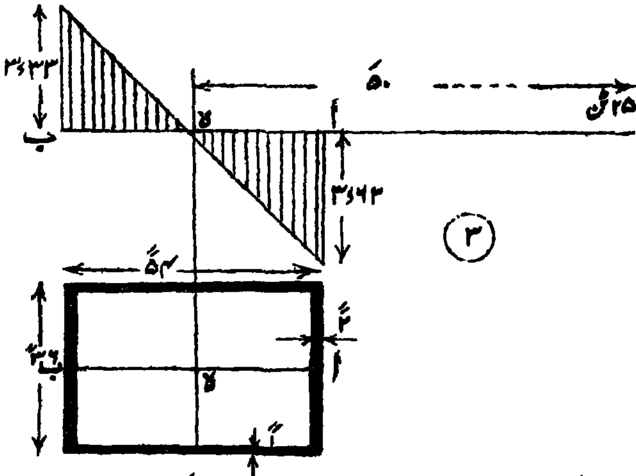
$$\therefore \quad ن = \frac{۲۵}{۲۴۴}\left(۱ + \frac{۲۷ \times ۶۰۰}{۴۸۴٫۵}\right)$$

$$= \frac{۲۵}{۲۴۴} \times ۳۴٫۵ = ۳٫۶۲$$ ٹن فی مربع انچ

$$ز_ت = \frac{۲۵}{۲۴۴}\left(\frac{۲۷ \times ۶۰۰}{۴۸۴۵}-۱\right) = ۳۶۳۳ \text{ ٹن فی مربع انچ}$$

زوروں کی تقسیم شکل ۹۷ میں دکھائی گئی ہے۔

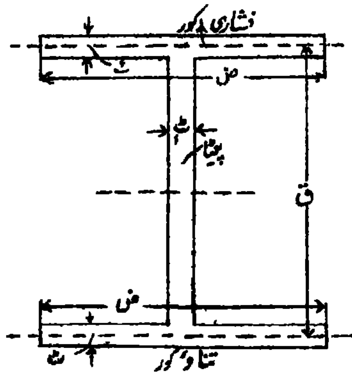




شکل ۹۷۔ خماؤ کے زور اور راست زور ایک ساتھ

I تراشوں کے مقیاس کی تقریبی قیمت ـــــ عملاً

گرڈر عموماً I تراش کے بنائے جاتے ہیں کیونکہ سب میں زیادہ باکفایت تراش وہ ہے جس میں مادہ ممکنہ مقدار میں کناروں یا کوروں میں مرتکز کیا گیا ہو۔ اس تراش کے مقیاس کے لیے ایک تقریبی ضابطہ حسب ذیل طریقے پر معلوم کیا جا سکتا ہے:- فرض کرو کہ تراش کی کوروں کا درمیانی فاصلہ ق ہے (شکل ۸۰) اور کوروں کی موٹائی ٹ ہے۔ تب اگر کوروں کی چوڑائی ض ہو اور پٹیے کی موٹائی $ٹ_1$ ہو تو



شکل ۸۰

$$آ = \frac{ض(ق+ٹ)^3}{12} - \frac{(ض-ٹ_1)(ق-ٹ)^3}{12} \quad ..... (1)$$

یعنی $$12\,آ = ض(ق^3 + 3ق^2ٹ + 3قٹ^2 + ٹ^3)$$

$$-(ض-ٹ_1)(ق^3 - 3ق^2ٹ + 3قٹ^2 - ٹ^3)$$

$$= ض(6ق^2ٹ + ٹ^3) + ٹ_1(ق^3 - 3ق^2ٹ + 3قٹ^2 - ٹ^3)$$

$$\therefore \frac{\text{۱۲ آ}}{\text{ق}^{\text{۲}}} = \text{۲ض ٹ}\left(\text{۱} + \frac{\text{ٹ}^{\text{۲}}}{\text{۲ق}^{\text{۲}}}\right) + \text{ٹ}_{\text{۱}}\left(\text{ق} - \text{۳ٹ} + \frac{\text{۳ٹ}^{\text{۲}}}{\text{ق}} - \frac{\text{ٹ}^{\text{۳}}}{\text{ق}^{\text{۲}}}\right) \quad \text{......(۲)}$$

اب اگر ٹ بمقابلہ ض کے چھوٹا ہو تو $\frac{\text{ٹ}^{\text{۲}}}{\text{ق}^{\text{۲}}}$ اور $\frac{\text{ٹ}^{\text{۳}}}{\text{ق}^{\text{۲}}}$ نظر انداز کرنے کے قابل ہونگے اور اس طرح

$$\frac{\text{۱۲ آ}}{\text{ق}^{\text{۲}}} = \text{۲ض ٹ} + \text{ٹ}_{\text{۱}}\,\text{ق}\left(\text{۱} - \frac{\text{۳ٹ}}{\text{ق}}\right) \quad \text{............(۳)}$$

$$\text{یا} \quad \text{آ} = \frac{\text{ق}^{\text{۲}}}{\text{۱۲}}\left\{\text{۲ض ٹ} + \text{ٹ}_{\text{۱}}\,\text{ق}\left(\text{۱} - \frac{\text{۳ٹ}}{\text{ق}}\right)\right\}$$

$$\text{اب مق} = \frac{\text{آ}}{\frac{\text{ق+ٹ}}{\text{۲}}} = \frac{\text{۲آ}}{\text{ق+ٹ}} = \frac{\text{۲آ}}{\text{ق}\left(\text{۱} + \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}\right)}$$

$$= \frac{\text{۲آ}}{\text{ق}}\left(\text{۱} - \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}\right)$$ تقریباً (کیونکہ ٹ بمقابلہ ق کے چھوٹا ہے)

$$\therefore \text{مق} = \frac{\text{ق}^{\text{۲}}}{\text{۶ق}}\left\{\text{۲ض ٹ} + \text{ٹ}_{\text{۱}}\,\text{ق}\left(\text{۱} - \frac{\text{۳ٹ}}{\text{ق}}\right)\right\}\left(\text{۱} - \frac{\text{ٹ}}{\text{ق}}\right)$$

$$= \frac{\text{ق}}{\text{۶}}\left\{\text{۲ض ٹ} - \frac{\text{۲ض ٹ}^{\text{۲}}}{\text{ق}} + \text{ٹ}_{\text{۱}}\text{ق} - \text{۳ٹ ٹ}_{\text{۱}} - \text{ٹ ٹ}_{\text{۱}} + \frac{\text{۳ٹ}^{\text{۲}}\text{ٹ}_{\text{۱}}}{\text{ق}}\right\} \quad \text{..(۴)}$$

$$= \frac{\text{ق}}{\text{۶}}\left\{\text{۲ض ٹ} + \text{ٹ}_{\text{۱}}(\text{ق} - \text{ٹ})\right\}$$ پہلے تقریب تک جس میں $\text{ٹ}^{\text{۲}}$ یا $\text{ٹ ٹ}_{\text{۱}}$ والی رقمیں نظر انداز کر دی گئی ہیں۔

اب $\text{ض} \times \text{ٹ}$ = ایک کور کا رقبہ = ب

اور $\text{ٹ}_{\text{۱}}(\text{ق} - \text{ٹ})$ = پیٹے کا رقبہ = بہ

$$\therefore \text{مق} = \text{ق ب} + \frac{\text{بہ ق}}{\text{۶}}$$

$$= \text{ق}\left(\text{ب} + \frac{\text{بہ}}{\text{۶}}\right) \quad \text{....................(۵)}$$

اِس طرح حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے :۔ I تراش کا مقیاس تقریبی طور پر مساوی ہے کودوں کے مرکزوں کے درمیان کی گہرائی ضرب ایک کور اور $\frac{1}{6}$ پیٹے کا رقبہ۔

انگلستان میں دستور یہ ہے کہ مقیاس حاصل کرتے وقت پیٹے کو بالکل نظر انداز کر دیتے ہیں۔ اِس صورت میں مق = ب × ق۔

اِن تقریبی قاعدوں کی عددی مثالیں دی جائینگی اور دکھایا جائیگا کہ یہ قاعدے تختی دار اور بکس گرڈروں کی تجویز میں کس حد تک درست ہیں۔

شہتیروں کی نظری اور حقیقی مضبوطیوں کے اختلافات

بہت سے عملی آدمیوں نے اس پر تعجب کا اظہار کیا ہے کہ شہتیروں کی آزمائش میں حقیقی اور نظری شکستی مضبوطیوں میں مطابقت نہیں حاصل ہوتی۔ کئی شہتیروں کا امتحان کیا گیا اور اسی مادے کا ایک تنشی امتحان بھی کیا گیا اور یہ پایا گیا کہ خماؤ کے معمولی نظریے کی رُو سے جس بوجھ کو شہتیر میں شکستی زور پیدا کرنا چاہیے وہ شکستگی نہیں پیدا کرتا۔ اس کے لیے مزید بوجھ درکار ہوتا ہے جس کی مقدار تراش کی شکل پر منحصر ہوتی ہے۔ اس سے شہتیر کے معمے کی ابتدا ہوئی اور یہ خیال کیا گیا کہ غالباً مادہ خماؤ میں تناؤ کی نسبت زیادہ مضبوط ہے۔ یہاں تک کہ ایک پرانا غلط نظریہ جس میں مستطیلی شہتیر کے لیے مق کو $\frac{ز \times ض ق^2}{6}$ کی بجائے $\frac{ز \times ض ق^2}{4}$ مانا گیا ہے شکستی امتحان سے حقیقی نظریے کی نسبت زیادہ مطابقت رکھتا ہے۔

اِس عدم مطابقت کی وجہ یہ ہے کہ خماؤ کا معمولی نظریہ شکستی زوروں پر قابلِ اطلاق ہی نہیں۔ اور اس نظریے میں جو مفروضات اختیار کیے گئے اُن کو سمجھنے کے بعد کوئی بھی نظری اور حقیقی شکستی مضبوطیوں میں مطابقت کی توقع نہیں کر سکتا۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ لچک کی حد کے بعد زور اور فساد متناسب نہیں رہتے۔

بعض تجربہ کرنے والوں کا جنہوں نے شہتیروں کے انصرافوں کو ناپا ہے بیان ہے کہ نرم فولاد میں لچک کی حد پر بھی مطابقت نہیں ہوتی۔ لیکن اس کی وجہ دراصل یہ ہے کہ لچک کی حد اور نقطۂ مغلوبیت کے درمیان مغالطہ ہو جاتا ہے اور یہ وجہ بھی ہے کہ انصراف کافی صحت کے ساتھ نہیں ناپے گئے۔ باب ا میں ہم نے بیان کیا ہے کہ نرم فولاد کے تنشی امتحان میں لچک کی حد اور نقطۂ مغلوبیت بہت قریب قریب واقع ہوتے ہیں۔ لیکن خماؤ میں ایسا نہیں ہوتا۔ بلکہ نقطۂ مغلوبیت لچک کی حد کے خاصا بعد آتا ہے۔ اس لیے ظاہر ہے کہ اگر خماؤ میں نقطۂ مغلوبیت کو لچک کی حد سمجھا جائے تو خاصی غلطی کا امکان ہے۔ اگر لچک کی حد کو احتیاط کے ساتھ ناپا جائے تو یہ پایا جائیگا کہ لچک کی حد پر تناؤ اور خماؤ کے زوروں میں کافی مطابقت ہوتی ہے۔ اینڈ ریوز و پیرسن[1] کے مضمون میں (جو حمالہ کے آنکڑوں کے زوروں پر لکھا گیا ہے اور جس کا حوالہ اس کتاب کے صفحہ ۲۱۳ پر دیا گیا ہے) یہ نکتہ ضمناً ثابت کیا گیا ہے۔ خماؤ میں نقطۂ مغلوبیت کی لچک کی حد سے کچھ فاصلے پر واقع ہونے کی وجہ یہ ہے کہ خماؤ میں پہلے صرف کناروں کا مادہ نقطۂ مغلوبیت کو پہنچتا ہے اور پوری تراش اس وقت تک مغلوب نہیں ہوگی جب تک کہ مرکز کے قریب کا مادہ بھی نقطۂ مغلوبیت کو نہ پہنچ جائے۔

اس طرح دیکھو جب تک نظریے کی شرائط پوری ہوتی رہیں نظریے اور امتحان میں کوئی اختلاف نہیں ہوتا۔ اگر ایک خاص حد کے بعد ان شرائط کا پورا ہونا موقوف ہو جائے اور ہم چاہیں کہ زوروں کا حساب لگائیں تو ایک نیا نظریہ حاصل کرنا ہوگا۔

شہتیر کی نظری اور حقیقی مضبوطی کے اس اختلاف سے یہ سبق ملتا ہے کہ کامی زور کو لچک کی حد کے زور کی رقوم میں اختیار کیا جائے نہ کہ شکستی زور کی

[1] Andrews-Pearson

(اور یہ ہم باب ۲ میں بھی لکھ چکے ہیں) کیونکہ اگر مثلاً کسی شہتیر کا کامی زور تناؤ کی لچک کی حد کا نصف ہو تو شہتیر کے کامی بوجھ کا دگنا بوجھ لچک کی حد پیدا کریگا۔ لیکن اگر کامی زور تناؤ کے شکستی زور کا چوتھائی لیا جائے تو کامی بوجھ کا چارگنا بوجھ ناکارگی نہیں پیدا کریگا۔ اِس کے لیے زیادہ بوجھ درکار ہوگا جو تراش کی شکل پر منحصر ہوگا۔



ساتواں باب

متحرک بوجھوں کے لیے خماؤ کے معیار اور جزی قوتیں

باب ۵ میں ہم نے مختلف قسم کے ثابت بوجھوں کے تحت فصل کے مختلف نقاط پر کے خماؤ کے معیاروں اور جزی قوتوں سے بحث کی ہے۔
اگر ادائو کا کوئی نظام کسی شہتیر پر اس طرح حرکت کرے کہ ہر ایک بوجھ مختلف اوقات میں فصل کے ہر ممکن مقام پر واقع ہو تو اس طرح کے نظام کو متحرک بوجھوں کا نظام کہا جائیگا۔

بوجھ کے حرکت کرتے وقت شہتیر کی ہر تراشں پر خماؤ کے معیار اور جزی قوت کی قیمت بدلتی ہے ہم شہتیر کی ہر تراش پر بوجھ کے ہر محل کے لیے خماؤ کے معیار اور جزی قوت کی قیمت معلوم کرنے کی کوشش نہیں کرینگے بلکہ یہ دیکھینگے کہ عبور کے دوران میں کسی نقطے پر ان کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہوتی ہے۔ اس طرح متحرک بوجھوں کے لیے خماؤ کے معیار اور جز کے جو نقشے حاصل ہونگے وہ ان قیمتوں کو تعبیر نہیں کرینگے جو ایک ہی وقت میں واقع ہوتی ہیں بلکہ ہر تراش پر اس اعظم قیمت کو تعبیر کرینگے جو بوجھ کے کسی محل کے لیے اس تراش پر ممکن ہے۔

ہم صرف سادہ سہارے ہوئے شہتیروں پر غور کرینگے۔ بر آمدہ ہیرموں پر متحرک بوجھ شاذو نادر ہی آتے ہیں اور اگر آئیں بھی تو اعظم خماؤ کا معیار اور جز

اُس وقت واقع ہوتے ہیں جب کہ بوجھ عین آزاد سرے پر ہو۔
ذیل کی معیاری صورتوں پر غور کرو:۔

(۱) **ایک منفرد بوجھ** ——— فرض کرو کہ ایک منفرد بوجھ و شکل ۱ء۸ (۱) ایک شہتیر ا ب کو جس کا فصل ل ہے بائیں جانب سے دائیں جانب عبور کرتا ہے۔

جزی نقشہ ——— فرض کرو کہ بوجھ نقطہ ط پر ہے جو ب سے فاصلہ ما پر ہے اور نقطہ ج کی طرف حرکت کر رہا ہے جو ب سے فاصلہ لا پر ہے۔

$$\text{تب ج پر جزی قوت} = ج = ر_ب = \frac{و(ل-ما)}{ل}$$

$$= و - \frac{و ما}{ل}$$

یہ زیادہ سے زیادہ ہوگا جب کہ ما کم سے کم ہوگا اس سے معلوم ہوا کہ بوجھ کے ج کی طرف حرکت کرنے سے جز بڑھتا ہے۔ اعظم قیمت اُس وقت واقع ہوگی جب کہ بوجھ ج پر پہنچ جائیگا اور یہ قیمت $\frac{و(ل-لا)}{ل}$ ہوگی۔

اب فرض کرو کہ بوجھ ج سے آگے نقطہ طَ پر ہے جو ب سے فاصلہ ی پر ہے۔

$$\text{تب ج} = ر_ب - و$$

$$= \frac{و(ل-ی)}{ل} - و$$

$$= -\frac{و ی}{ل}$$

یہ عددی طور پر اعظم ہوگا جب کہ ی اعظم ہوگا یعنی جب کہ ی = لا - اس سے

معلوم ہوا کہ بوجھ کے ج تک پہنچنے تک ج پر جز کی قیمت بڑھتی ہے۔ ج سے گزرنے پر جز کی قیمت ایک دم بدل کر منفی اعظم ہوجاتی ہے۔ اور بوجھ اور آگے بڑھے تو یہ قیمت عددی طور پر گھٹتی ہے۔

ج پر اعظم مثبت جز = $\frac{\text{و(ل-لا)}}{\text{ل}}$ ۔ یہ ج کے ا سے فاصلہ کے متناسب ہے۔ اِس طرح آتے ہوئے بوجھ کے تحت اعظم جز کا نقشہ ایک خطِ مستقیم ا$_1$ ف ہوگا۔ جہاں ف ب$_1$ = و۔

ج پر اعظم منفی جز = $-\frac{\text{و لا}}{\text{ل}}$ ۔ یہ ج کے ب سے فاصلے کے متناسب ہے۔ اور اِس طرح ہٹتے ہوئے بوجھ کے تحت اعظم جز کا نقشہ ایک خطِ مستقیم ب$_1$ د ہوگا جہاں ا$_1$ د = و۔

اِن نقشوں کا استعمال حسب ذیل ہے:۔ خط ا$_1$ ب پر کوئی نقطہ م لو اور فرض کرو کہ م میں کا انتصابی خط جز کے نقشے کو ص اور ر پر قطع کرتا ہے۔ تب نقطہ م پر م ص اعظم مثبت جز ہے اور م ر اعظم منفی جز۔ اور جز کی مجموعی وسعت ص ر ہے

خماؤ کے معیار کا نقشہ۔ آتے ہوئے بوجھ کے لیے ج پر خماؤ کا معیار = م$_ج$ = ر$_ب$ × لا

یہ اعظم ہوگا جب کہ ر$_ب$ اعظم ہوگا یعنی جب کہ بوجھ ج پر ہو۔

ہٹتے ہوئے بوجھ کے لیے م$_ج$ = ر$_ب$ × لا − و (لا − ی)

$$= \frac{\text{و(ل-ی)}}{\text{ل}} \times \text{لا} - \text{و (لا-ی)}$$

$$= \text{و ی} - \frac{\text{و ی لا}}{\text{ل}} = \text{و ی} \left(1 - \frac{\text{لا}}{\text{ل}}\right)$$

یہ اعظم ہوگا جب کہ ی اعظم ہو اور ہمیشہ مثبت ہوگا کیونکہ لا ہمیشہ < ل

جس کی وجہ سے $(۱ - \frac{لا}{ل})$ کبھی منفی نہیں ہوسکتا۔

جب　ی = لا　تو　$م_ج = و\,لا\,(۱ - \frac{لا}{ل}) = \frac{و\,(ل - لا)\,لا}{ل}$

$= ی_ب \times لا$

اِس لیے خماؤ کا معیار نقطہ ج کے سر نے تک بڑھتا جائیگا اور ج سے گزر کر ہٹتے وقت گھٹتا جائیگا۔

اِس طرح $م_ج$ کی اعظم قیمت $= و\,لا - \frac{و\,لا^۲}{ل}$

یہ $لا^۲$ پر منحصر ہے اس لیے اعظم خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا جس کا اعظم معین مرکز پر ہوگا اور $\frac{و\,ل}{۲} - \frac{و\,(\frac{ل}{۲})^۲}{ل} = \frac{و\,ل}{۴}$ ہوگا۔

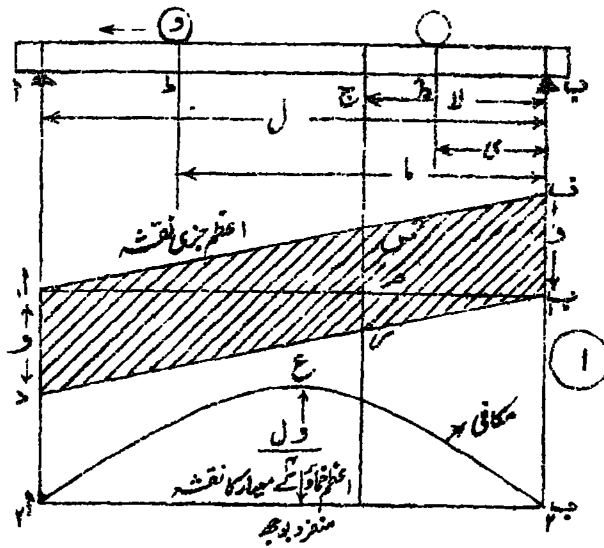
یہ نقشہ شکل ۷۱ (۱) میں $ا_۲$ ع $ب_۲$ سے تعبیر کیا گیا ہے۔

اگر بوجھ دائیں سے بائیں کو حرکت کرے تو بھی نقشے یہی رہینگے کیونکہ خواہ بوجھ آرہا ہو اور نقطہ ط پر پہنچے یا ج سے ہٹ رہا ہو اور ط پر پہنچے دونوں صورتوں میں ج پر جز اور خماؤ کا معیار وہی ہونگے۔

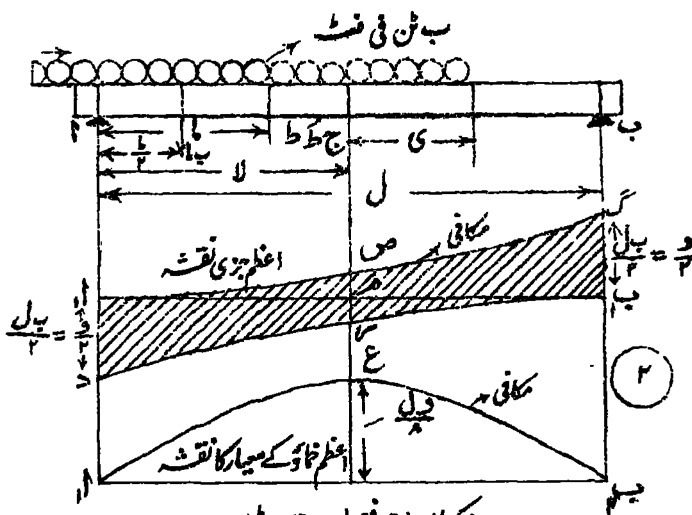
(۲) یکساں بوجھ فصل سے بڑا ــــ فرض کرو کہ ایک یکساں بوجھ جو فصل سے بڑا ہے اور جس کی حدت ب ٹن فی طولی فٹ ہے فصل ل کے ایک شہتیر ا ب پر بائیں سے دائیں کو حرکت کرتا ہے۔ دیکھو شکل ۷۱ (۲)۔

جز کا نقشہ ــــ ا سے فاصلہ لا پر کے ایک نقطہ ج پر غور کرو اور فرض کرو کہ بوجھ کا آگے کا سرا نقطہ ط تک پہنچا ہے جو ا سے فاصلہ ما پر ہے۔

تب $ج = ی_ب = \frac{ب\,ما^۲}{۲\,ل}$



منفرد بوجھ



یکساں بوجھ فصل سے بڑا

شکل ۱۰۸ ۔ متحرک بوجھ

یہ ما کے ساتھ بڑھتا ہے اس لیے ج پر اعظم جز اُس وقت ہوگا جب کہ بوجھ کا اگلا سرا ج تک پہنچے۔

اب فرض کرو کہ بوجھ کا اگلا سرا ج سے بقدر فاصلہ ی کے بڑھ گیا ہے۔

تب

$$ج_ج = م_ب - ب \times ی$$

$$= \frac{ب(لا+ی)^۲}{۲ل} - ب ی$$

$$= ب\left\{\frac{لا^۲ + ۲لای + ی^۲}{۲ل} - ی\right\}$$

$$= ب\left\{\frac{لا^۲}{۲ل} + \frac{۲لای}{۲ل} + \frac{ی^۲}{۲ل} - ی\right\}$$

$$= \frac{بلا^۲}{۲ل} - ب ی\left\{۱ - \frac{ی}{۲ل} - \frac{لا}{ل}\right\}$$

اس میں $\left(۱ - \frac{ی}{۲ل} - \frac{لا}{ل}\right)$ مثبت ہوگا اگر $۲ل > ی + ۲لا$ کیونکہ یہ مقدار $\frac{۲ل - (ی + ۲لا)}{۲ل}$ کے مساوی ہے۔

اور یہ شرط ہمیشہ پوری ہوگی کیونکہ ل چھوٹا نہیں ہوسکتا لا + ی سے اور اس طرح ۲ ل لازماً بڑا ہوگا ۲ لا + ی سے۔

اس سے معلوم ہوا کہ ی کے بڑھنے سے $ج_ج$ گھٹیگا۔ اس طرح جز کی اعظم قیمت اُس وقت واقع ہوگی جب کہ ی صفر ہو یعنی جب کہ بوجھ کا اگلا سرا دیے ہوئے نقطے کے عین اوپر ہو۔

ج پر اعظم منفی جز اس وقت واقع ہوگا جب کہ بوجھ کا پچھلا سرا ج سے ابھی گزر چکا ہو کیونکہ بوجھ کا یہ محل ایسا ہے گویا بوجھ دوسری سمت سے نقطہ تک پہنچا ہے۔

اِس لیے ج پر اعظم مثبت جز = $\frac{ب\, لا^2}{2\, ل}$

" " " منفی " = $\frac{ب\,(ل - لا)^2}{2\, ل}$

اس طرح اعظم جز کے منحنی مکافی ہونگے جن کے راس ا، اور ب، ہونگے اور سروں کے معین $\frac{ب\, ل}{2} = \frac{و}{2}$ ہونگے۔

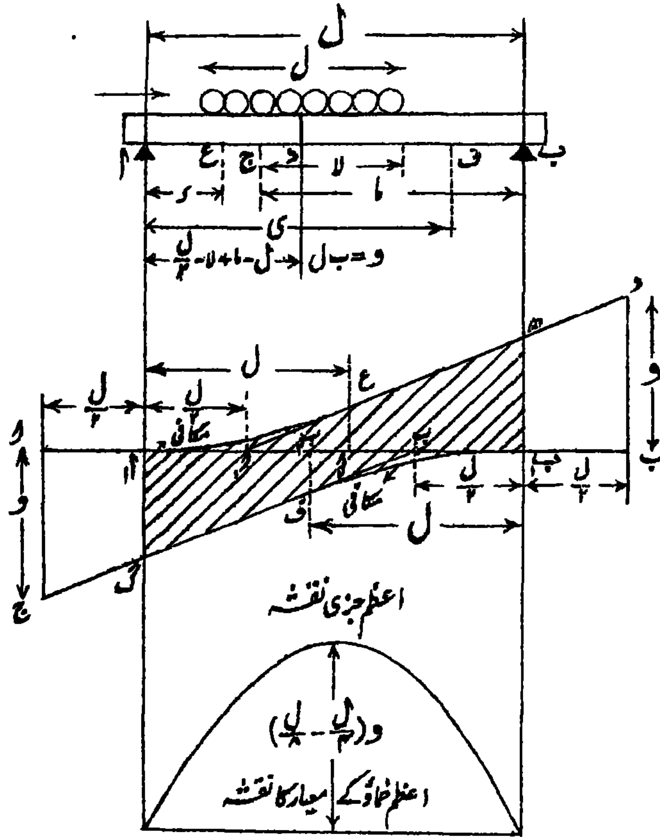
حسب سابق اگر فصل پر کوئی نقطہ م لیا جائے تو م ص اور م ر سے علی الترتیب اعظم مثبت اور اعظم منفی جز تعبیر ہونگے اور ص ر سے جز کی مجموعی وسعت۔

خماؤ کے معیار کا نقشہ ـــــ بوجھ کا اگلا سرا جب ط تک پہنچا ہو تو م ج = ر ب (ل - لا)۔ اگر بوجھ ذرا آگے بڑھ کر ط، تک پہنچے تو ر ب کی قیمت بڑھیگی اور اِس طرح بوجھ کے آگے بڑھنے سے خماؤ کا معیار بڑھیگا۔ اور یہ ہر تراشش کے لیے درست ہے یعنی اُن تراشوں کے لیے بھی جن کو بوجھ ڈھانک چکا ہو مثلاً ط کیونکہ م ط = ر ب × ما - $\frac{ب\, ما^2}{2}$ اور بوجھ کے آگے بڑھنے سے ر ب بڑھتا ہے۔

اِس لیے معلوم ہوا کہ ہر نقطے پر خماؤ کا معیار اس وقت اعظم ہوگا جبکہ پورا فصل ڈھنک جائے۔ اِس طرح اعظم خماؤ کے معیار کا منحنی ایک مکافی ہوگا جس کا اعظم معین = $\frac{ب\, ل^2}{8} = \frac{و\, ل}{8}$

(۳) یکساں بوجھ فصل سے چھوٹا ـــــ فرض کرو کہ ایک یکساں بوجھ جس کا طول ل ہے اور حدت ب ٹن فی طولی فٹ ہے ایک شہتیر ا ب پر جس کا فصل ل ہے بائیں سے دائیں کو حرکت کرتا ہے (دیکھو شکل ۸۲)

جز کا نقشہ ــــ بالکل گزشتہ صورت کے استدلال سے نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی نقطے پر اعظم مثبت جز اُس وقت واقع ہوگا جب کہ بوجھ کا اگلا سرا اُس نقطے تک پہنچے۔ اور اعظم منفی جز اُس وقت ہوگا جب کہ پچھلا سرا نقطے سے گزرنے کو ہو۔



شکل ۸۲
یکساں متحرک بوجھ فصل سے چھوٹا

اب ا سے فاصلہ ی پر ایک نقطہ ع پر غور کرو جہاں ی < ل۔
ج ع کی اعظم مثبت قیمت اُس وقت ہوگی جب کہ بوجھ کا اگلا سرا ع تک

پہنچے، اور یہ قیمت $\frac{ب ی^{2}}{2 ل}$ ہوگی۔ یہ بالکل گزشتہ صورت کی طرح ہے کیونکہ ع تک پورا بوجھ فصل پر نہیں آیا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ ا سے فاصلہ ل تک جز کا نقشہ ایک مکافی ہوگا۔

اب ا سے فاصلہ ی پر نقطہ ف لو جہاں ی > ل

$$ج_{ف} \text{ کی اعظم قیمت } = ر_{ب} = \frac{ب ل (ی - \frac{ل}{2})}{ل} = \frac{و (ی - \frac{ل}{2})}{ل}$$

جہاں و مجموعی بوجھ ہے۔

$$\therefore ج_{ب} = \frac{و (ل - \frac{ل}{2})}{ل} = و \left(1 - \frac{ل}{2 ل}\right)$$

ج_ف کے جملے میں ی کی صرف پہلی قوت شریک ہوتی ہے اس لیے ا سے بوجھ کے سرے سے پرے کے نقطوں کے لیے جز کا نقشہ ایک خطِ مستقیم ہوگا۔

اگر اس خطِ مستقیم کو خارج کیا جائے تو خط ا ب کو کس نقطے پر ملیگا یہ معلوم کرنے کے لیے یہ دیکھنا ہوگا کہ ی کی کس قیمت کے لیے ج_ف صفر ہوتا ہے، یہ قیمت ی = $\frac{ل}{2}$ ہے۔

ان نتائج سے اعظم جز کا نقشہ کھینچنے کے لیے حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے:۔

ا اور ب دونوں کے دونوں طرف فاصلہ $\frac{ل}{2}$ پر نقاط ر، ر اور ب، ب لو۔ اور فصل کے اندر ا اور ب سے فاصلہ ل پر نقاط ر اور ب۔

انتصابی خط ب د اوپر کی طرف کھینچو جو و کو تعبیر کرے اور انتصابی خط ا ج نیچے کی طرف کھینچو جو بھی و کو تعبیر کرے۔ اور ج ب اور د ر کو ملاؤ۔ فرض کرو کہ یہ ر اور ب میں کے انتصابی خطوط کو ع اور ف پر ملتے ہیں۔ تب ع میں سے ایک مکافی کھینچو جس کا راس ا، ہو، اور ف میں سے ایک

مکافی کھینچو جس کا راس د ب ۱ ہو۔ تب ہ ع ۱، اور گ ف ب ۱ اعظم جز کے منحنی ہو نگے، اور ان کا طریق استعمال اوپر کی دو صورتوں کی طرح ہوگا۔

خماؤ کے معیار کا نقشہ ـــ فرض کرو کہ بوجھ کا مرکز نقطہ د پر آیا ہے اور بوجھ کا اگلا سرا ج سے فاصلہ لا پر ہے جہاں ج کا فاصلہ ب سے ما ہے۔

$$\text{تب}\quad \text{ص}_{\text{ب}} = \frac{\text{ب ل} \times \text{ا د}}{\text{ل}} = \frac{\text{ب ل}}{\text{ل}}\left(\text{ل} - \text{ا} + \text{لا} - \frac{\text{ل}}{۲}\right)$$

$$\text{ج پر خماؤ کا معیار} = \text{م}_{\text{ج}} = \text{ص}_{\text{ب}} \times \text{ما} - \frac{\text{ب لا}^{۲}}{۲}$$

$$= \frac{\text{ب ل ما}}{\text{ل}}\left(\text{ل} - \text{ا} + \text{لا} - \frac{\text{ل}}{۲}\right) - \frac{\text{ب لا}^{۲}}{۲} \quad \ldots\ldots\ (۱)$$

$$\text{یہ اعظم ہوگا جب کہ}\quad \frac{\text{فر م}_{\text{ج}}}{\text{فر لا}} = ۰$$

$$\text{یعنی جب کہ}\quad \frac{\text{ب ل ما}}{\text{ل}} - \text{ب لا} = ۰$$

$$\text{یا}\quad \text{لا} = \frac{\text{ل ما}}{\text{ل}}$$

$$\text{یا}\quad \frac{\text{لا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ما}}{\text{ل}}$$

اِس سے ذیل کا قاعدہ حاصل ہوتا ہے :- کسی نقطے پر خماؤ کا معیار اُس وقت اعظم ہوگا جب کہ بوجھ اس نقطے سے اُسی نسبت میں تقسیم ہو جس میں کہ فصل تقسیم ہوتا ہے۔

∴ اس ربط کو م ج کی قیمت (۱) میں درج کرنے سے م ج کی اعظم

$$\text{قیمت} = \frac{\text{ب ل ما}}{\text{ل}}\left\{\text{ل} - \text{ما} + \frac{\text{ل ما}}{\text{ل}} - \frac{\text{ل}}{۲}\right\} - \frac{\text{ب ل}^{۲}\text{ ما}^{۲}}{۲\text{ ل}^{۲}}$$

$$= \frac{ب\,ل\,ا}{ل}\left\{ل - ا + \frac{ل\,ا}{۲\,ل} - \frac{ل}{۲}\right\}$$

$$= \frac{و\,ا}{ل}(ل - ا)(۱ - \frac{ل}{۲\,ل})$$

اس میں $ا^۲$ شریک ہوتا ہے، اس لیے اعظم خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا۔

اس مکافی کا اعظم معین $ا = \frac{ل}{۲}$ پر ہوگا اور حسب ذیل ہوگا:۔

$$\frac{و\,ل}{۲\,ل}\left(\frac{ل}{۲}\right)\left(۱ - \frac{ل}{۲\,ل}\right) = \frac{و\,ل}{۴}\left(۱ - \frac{ل}{۲\,ل}\right)$$

$$= \frac{و\,ل}{۴} - \frac{و\,ل}{۸}$$

یہ دیکھنا دلچسپی سے خالی نہیں کہ اگر ل = ۰ ہو جائے تو جزا اور خماؤ کے معیار کے نقشے بالکل صورت (۱) کے مطابق ہو جاتے ہیں، اور اگر ل = ل تو بالکل صورت (۲) کے مطابق ہوتے ہیں۔

(۴) دو منفرد بوجھ ایک ثابت باہمی فاصلے پر ــــ فرض کرو کہ دو منفرد بوجھ $و_۱$ اور $و_۲$ جن کا باہمی فاصلہ ل ہے ایک فصل ا ب کو عبور کرتے ہیں (شکل ۸۳ ر)۔ تب حاصل بوجھ و = $و_۱ + و_۲$ ہوگا اور بوجھوں سے فاصلوں ر اور ب پر نقطہ ط پر عمل کرے گا جہاں $\frac{و_۱}{و_۲} = \frac{ب}{ر}$

جزا کا نقشہ ــــ ا سے فاصلہ ا پر نقطہ ج پر غور کرو۔ اگر سامنے کا بوجھ ج تک نہیں پہنچا ہے اور ط کا ا سے فاصلہ لا ہے تو

$$ج_ج = \frac{و \times لا}{ل}$$

یہ لا کے ساتھ بڑھتا ہے اور اس طرح جج ذیل کی قیمت تک بڑھیگا

$$ج_ج = \frac{و(ا-ب)}{ل} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب فرض کرو کہ بوجھ ایسے محل میں پہنچے ہیں کہ ج . بوجھ و۲ اور نقطہ ط کے درمیان ہے اور فرض کرو کہ آگے کا بوجھ ج سے بقدر فاصلہ ج کے آگے نکل گیا ہے۔

تب
$$ج_ج = سب - و_۲$$

$$= \frac{و(ا+ج-ب)}{ل} - و_۲$$

یہ ج کے بڑھنے سے بڑھتا ہے اور اعظم ہوتا ہے جبکہ ج = ب

اس صورت میں

$$ج_ج = \frac{وا}{ل} - و_۲ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

یہ (۱) سے بڑا ہوگا اگر

$$و_۲ < \frac{وب}{ل}$$

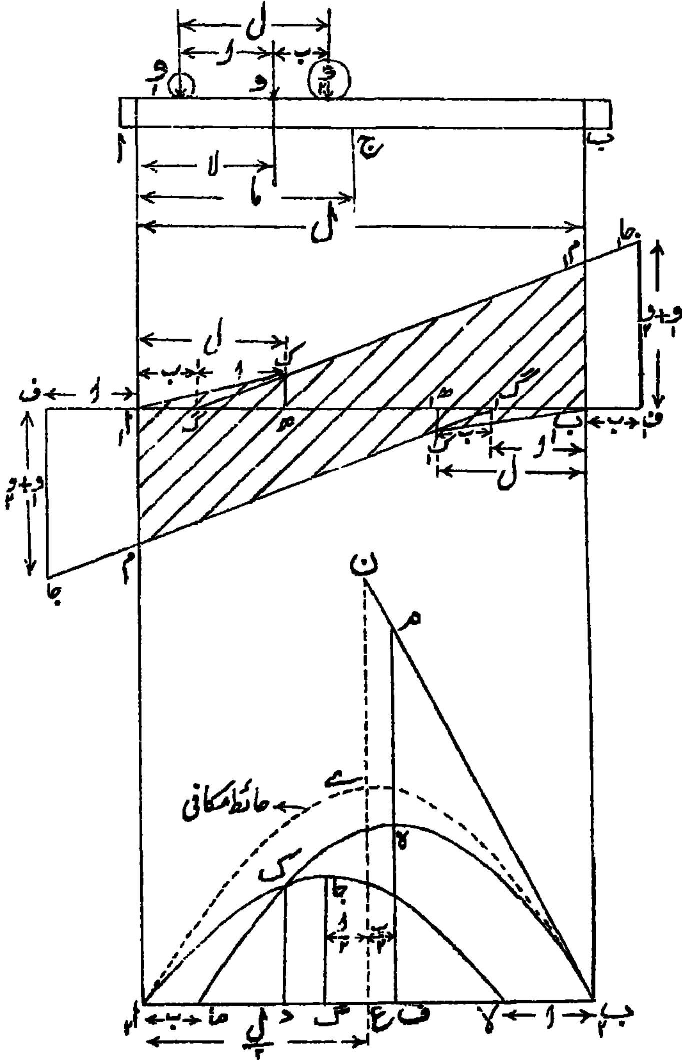
یا
$$\frac{ل}{ب} < \frac{و}{و_۲}$$

یا
$$\frac{ل}{ب} < ۱ + \frac{و}{و_۲}$$

اس طرح دیکھو یہ بحث دو صورتوں میں بٹ جاتی ہے۔

اگر $\frac{ل}{ب} < ۱ + \frac{و}{و_۲}$ تو ج پر اعظم جز اس وقت واقع ہوگا جب کہ

ط نقطہ ج پر پہنچے۔ اور اگر $\frac{ل}{ب} > ۱ + \frac{و_۱}{و_۲}$ تو اعظم جز اُس وقت واقع ہوگا جب کہ آگے کا بوجھ ج تک پہنچے۔ چونکہ عملاً $\frac{ل}{ب}$ ہمیشہ $۱ + \frac{و_۱}{و_۲}$ سے بڑا ہوگا



شکل ۱۳۵۔ دو منفرد متحرک بوجھ باہم ثابت فاصلہ پر

اس لیے ہم بحث کو اسی صورت تک محدود رکھینگے۔

$$\therefore \ \text{ج}_{\text{ج}} \text{ کی اعظم قیمت } = \frac{\text{و}\,(\text{ما} - \text{ب})}{\text{ل}}$$

اب فرض کرو کہ بوجھ ایسے محل میں پہنچا ہے کہ ج نقطہ ط اور و_{1} کے درمیان ہے اور فرض کرو کہ ط_{1} نقطہ ج سے بقدر فاصلہ د کے آگے بڑھ گیا ہے۔

$$\text{تب} \quad \text{ج}_{\text{ج}} = \text{ر}_{\text{ب}} - \text{و}_{2}$$

$$= \frac{\text{و}\,(\text{ما} + \text{د})}{\text{ل}} - \text{و}_{2}$$

یہ د کے بڑھنے سے بڑھتا ہے، اور اس طرح اعظم قیمت اس وقت ہوگی جب کہ د = ا

$$\text{اس طرح} \quad \text{ج}_{\text{ج}} = \frac{\text{و}\,(\text{ما} + \text{ا})}{\text{ل}} - \text{و}_{2} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

اب فرض کرو کہ بوجھ و_{2} نقطہ ج سے بقدر فاصلہ ع کے آگے نکل گیا ہے۔

$$\text{تب} \quad \text{ج}_{\text{ج}} = \text{ر}_{\text{ب}} - \text{و}$$

$$= \frac{\text{و}\,(\text{ما} + \text{ا} + \text{ع})}{\text{ل}} - \text{و}$$

$$= \frac{-\text{و}}{\text{ل}} \left[\text{ل} - (\text{ما} + \text{ا} + \text{ع})\right]$$

یہ ہمیشہ منفی ہوگا اور اس کی عددی قیمت اس وقت اعظم ہوگی جب کہ ع = ۰ اور اس وقت

$$\text{ج}_{\text{ج}} = \frac{-\text{و}}{\text{ل}} \left[\text{ل} - (\text{ما} + \text{ا})\right] \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

نتائج (۲) اور (۴) سے معلوم ہوتا ہے کہ ج پر کے اعظم جز ما کے خطی تفاعل ہیں اور اس طرح جز کے نقشے خطوطِ مستقیم ہو نگے۔ لیکن یہ معلوم ہو کہ ا اور ب کے قریب فاصلہ ل تک ایک وقت میں صرف ایک بوجھ فصل پر ہوتا ہے۔ اِن فاصلوں کے لیے اعظم جز کے نقشے حسب ذیل طریقے پر حاصل ہونگے:۔

ا سے فصل کے باہر اور اندر علی الترتیب فاصلہ د اور ب پر نقاط ف اور گ لو۔ اور اسی طرح ب، سے فاصلوں ب اور د پر نقاط ف، اور گ، لو۔ ف جا = و = و، + و، قائم کرو، اور ف، جا، اسی کے مساوی کھینچو اور جا گ اور جا گ، کو ملاؤ۔

پھر ا، اور ب، سے فاصلہ ل پر فصل پر نقطے ھ، ھ، لو اور فرض کرو کہ ھ اور ھ، میں کے انتصابی خطوط جا، گ اور جا گ، کو ک اور ک، پر قطع کرتے ہیں۔ اور ا ک اور ب ک، کو ملاؤ۔ تب اگر جا، گ اور جا گ، نقاط ب، اور ا، میں کے انتصابی خطوط کو م، اور م پر قطع کریں تو اعظم جز کے منحنی ا، ک م، اور ب، ک، م، ہونگے۔

خماؤ کے معیار کے نقشے ـــــــ اُن صورتوں پر غور کرو جن پر جز کے سلسلے میں غور کیا گیا ہے۔ اگر اگلا بوجھ ج کے قریب آرہا ہو اور ط کا فاصلہ ا سے لا ہو تو

$$\text{ھ}_{\text{ج}} = \frac{\text{و لا}}{\text{ل}}(\text{ل} - \text{ما})$$

یہ لا کے بڑھنے سے بڑھتا ہے اور اس کی اعظم قیمت یہ ہوگی:۔

$$\frac{\text{و}(\text{ما} - \text{ب})(\text{ل} - \text{ما})}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

اب فرض کرو کہ بوجھوں کا عمل ایسا ہے کہ ج بوجھ و، اور ط کے درمیان ہے اور فرض کرو کہ و، نقطہ ج سے بقدر فاصلہ ج کے آگے ہے۔

تب $\text{م}_{\text{ج}} = \text{ر}_{\text{ب}} (\text{ل} - \text{ما}) - \text{و}_{۲} \times \text{ج}$

$$= \frac{\text{و} (\text{ما} + \text{ج} - \text{ب})(\text{ل} - \text{ما})}{\text{ل}} - \text{و}_{۲}\,\text{ج} \quad \ldots\ldots (۶)$$

یہ ج کے بڑھنے سے بڑھیگا اگر $\frac{\text{و}_{۱}}{\text{و}} > \frac{\text{ما}}{\text{ل}}$ اور گھٹیگا اگر $\frac{\text{و}_{۱}}{\text{و}} < \frac{\text{ما}}{\text{ل}}$

اب فرض کرو کہ بوجھ اس طرح ہیں کہ ج نقطہ ط اور $\text{و}_{۱}$ کے درمیان ہے اور فرض کرو کہ ط نقطہ ج سے بقدر فاصلہ د کے آگے ہے۔

تب $\text{م}_{\text{ج}} = \text{ر}_{\text{ب}} (\text{ل} - \text{ما}) - \text{و}_{۲} (\text{ب} + \text{د})$

$$= \frac{\text{و} (\text{ما} + \text{د})}{\text{ل}} (\text{ل} - \text{ما}) - \text{و}_{۲} (\text{ب} + \text{د}) \quad \ldots\ldots (۷)$$

اس کا بڑھنا اور گھٹنا بھی (۶) کی طرح ہے۔

آخر میں فرض کرو کہ بوجھ $\text{و}_{۱}$ نقطہ ج سے بقدر فاصلہ ع کے نکل گیا ہے۔

تب $\text{م}_{\text{ج}} = \text{ر}_{\text{ب}} (\text{ل} - \text{ما}) - \text{و} (\text{ا} + \text{ع})$

$$= \frac{\text{و} (\text{ما} + \text{ا} + \text{ع})(\text{ل} - \text{ما})}{\text{ل}} - \text{و} (\text{ا} + \text{ع})$$

$$= \frac{\text{و}\,\text{ما} (\text{ل} - \text{ما})}{\text{ل}} + \frac{\text{و} (\text{ا} + \text{ع})(\text{ل} - \text{ما})}{\text{ل}} - \text{و} (\text{ا} + \text{ع})$$

$$= \frac{\text{و}\,\text{ما} (\text{ل} - \text{ما})}{\text{ل}} - \frac{\text{و} (\text{ا} + \text{ع})\,\text{ما}}{\text{ل}}$$

یہ ع کے بڑھنے سے گھٹتا ہے، اِس لیے خماؤ کے معیار کی اعظم قیمت ع = ۰ پر واقع ہوگی اور حسبِ ذیل ہوگی:—

$$\text{م}_{\text{ج}} = \frac{\text{و ما(ل − ما)}}{\text{ل}} - \frac{\text{و ا ما}}{\text{ل}}$$

$$= \frac{\text{و ما(ل − ما − ا)}}{\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۸)$$

اور مساوات (۵) سے یعنی جب کہ بوجھ $\text{و}_۲$ نقطہ ج پر آئے

$$\text{م}_{\text{ج}} = \frac{\text{و (ما − ب) (ل − ما)}}{\text{ل}}$$

$$= \frac{\text{و ما(ل − ما)}}{\text{ل}} - \frac{\text{و ب(ل − ما)}}{\text{ل}}$$

∴ (۵) اور (۸) میں (۵) یا (۸) بڑا ہوگا بمطابقت اس کے کہ

$\frac{\text{و ا ما}}{\text{ل}}$ بڑا ہے یا مساوی ہے یا چھوٹا ہے $\frac{\text{و ب (ل − ما)}}{\text{ل}}$ سے

یعنی ا ما 〃 〃 〃 〃 〃 ب (ل − ما) 〃

〃 ما (ا + ب) 〃 〃 〃 〃 ب ل 〃

〃 $\frac{\text{ما}}{\text{ل}}$ 〃 〃 〃 〃 $\frac{\text{ب}}{\text{ا + ب}}$ 〃

〃 $\frac{\text{ما}}{\text{ل}}$ 〃 〃 〃 〃 $\frac{\text{و}_۱}{\text{و}}$ 〃

اس لیے نتائج (۵) تا (۸) سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر $\frac{\text{ما}}{\text{ل}} > \frac{\text{و}_۱}{\text{و}}$ تو کسی نقطے پر اعظم خماؤ کا معیار اس وقت ہوتا ہے جب کہ $\text{و}_۲$ اس نقطے پر ہو۔ لیکن اگر $\frac{\text{ما}}{\text{ل}} < \frac{\text{و}_۱}{\text{و}}$ تو اعظم خماؤ کا معیار اس وقت ہوگا جب کہ $\text{و}_۱$ اس نقطے پر ہو۔

فرض کرو کہ د ایک ایسا نقطہ ہے کہ $\frac{\text{ا}_۲\text{د}}{\text{ا}_۲\text{ب}_۲} = \frac{\text{و}_۱}{\text{و}}$، تب $\text{ا}_۲$ اور د کے درمیان کسی نقطے پر خماؤ کا معیارِ اعظم اُس وقت ہوگا جب کہ $\text{و}_۱$ اس نقطے پر ہو اور

د اور ب۲ کے درمیان کسی نقطے پر اُس وقت جب کہ و۲ اس نقطے پر ہو۔

دیکھو (۵) اور (۸) کو تعبیر کرنے والے منحنی مکافی ہو نگے، اس لیے خماؤ کے معیار کے منحنیوں کو کھینچنے کا طریقہ حسب ذیل ہوگا:۔

پہلے مساوات (۵) کے مکافی پر غور کرو۔

اس کی صفر قیمت ما = ب پر ہوتی ہے اور اعظم قیمت ما = $\frac{\text{ل}}{۲} + \frac{\text{ب}}{۲}$ پر ہوتی ہے اور خماؤ کے معیار کی یہ اعظم قیمت

$$= \frac{\text{و}}{\text{ل}}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \frac{\text{ب}}{۲}\right)^{۲} = \frac{\text{و}}{۴\text{ل}}(\text{ل} - \text{ب})^{۲}$$

اس لیے ا۲ سے فاصلہ ب پر نقطہ ما لو اور فصل کے وسطی نقطہ ع سے فاصلہ $\frac{\text{ب}}{۲}$ پر دائیں طرف نقطہ ت لو۔ ت لا قائم کرو جو کسی مناسب پیمانے پر $\frac{\text{و}}{۴\text{ل}}(\text{ل} - \text{ب})^{۲}$ کو تعبیر کرے اور مکافی ما لا ب۲ کھینچو جس کا راس لا ہو۔

اب مساوات (۸) کے مکافی پر غور کرو۔

اس کی صفر قیمت ما = ل - ا پر ہوتی ہے اور اعظم قیمت ما = $\frac{\text{ل}}{۲} - \frac{\text{ا}}{۲}$ پر ہوتی ہے اور حسب ذیل ہوتی ہے:۔

$$\frac{\text{و}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \frac{\text{ا}}{۲}\right)}{\text{ل}}\left(\text{ل} - \frac{\text{ل}}{۲} + \frac{\text{ا}}{۲} - \text{ا}\right) = \frac{\text{و}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \frac{\text{ا}}{۲}\right)^{۲}}{\text{ل}} = \frac{\text{و}}{۴\text{ل}}(\text{ل} - \text{ا})^{۲}$$

اس لیے ب۲ سے فاصلہ ا پر ایک نقطہ لا لو اور ع سے فاصلہ $\frac{\text{ا}}{۲}$ پر بائیں طرف نقطہ گ لو اور گ جا = $\frac{\text{و}}{۴\text{ل}}(\text{ل} - \text{ا})^{۲}$ قائم کرو اور مکافی ا۲ جا لا قائم کرو جس کا راس جا ہو۔

یہ دونوں مکافی ک پر ملینگے اور اس طرح اعظم خماؤ کے معیار کا منحنی ا۲ ک لا ج۲ ہوگا۔

معادل یکساں بوجھ ۔ حائط مکافی ۔ گرڈروں کی تجویز میں دستور یہ ہے کہ متحرک بوجھوں سے پیدا ہونے والے اعظم خماؤ کے معیار کو ایک معادل متحرک یکساں بوجھ کی رقوم میں بیان کیا جائے۔ اور یہ اس طرح ہوسکتا ہے کہ ایک ایسا مکافی معلوم کیا جائے جو متحرک بوجھ کے اعظم خماؤ کے معیار کے منحنی کو عین گھیر لے۔ اس کے لیے حسب ذیل عمل کیا جائیگا:۔ دونوں مکافیوں میں کے بڑے مکافی کا ب۲ پر کا مماس کھینچو اور یہ اس طرح کہ ﻫ مر = ﻫ فـ بناؤ اور ج۲ مر کو ملاؤ۔ فرض کرو کہ یہ خارج ہو کر ع میں سے انتصابی خط کو ن پر ملتا ہے اور ع سے = ½ ع ن بناؤ۔ تب مکافی ا۲ سے ب۲ جس کا راس سے ہے حائط مکافی ہوگا۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نظام کا معادل یکساں بوجھ وَ ہے۔

تب
$$\text{سے ع} = \frac{\text{وَ ل}}{۸}$$

یا
$$\text{وَ} = \frac{۸ \times \text{سے ع}}{\text{ل}}$$

اگر گرڈر کو دو مساوی بوجھ عبور کریں تو بالکل موجودہ صورت کا عمل کیا جائیگا۔ صرف ا = ب لیا جائیگا اور مکافی کے دونوں نصف حصے بالکل ایک دوسرے کے مشابہ ہونگے۔

اِس صورت میں
$$\text{فـ ﻫ} = \frac{\text{و}}{۴\,\text{ل}}\left(\text{ل} - \frac{\text{لِ}}{۲}\right)^{۲}$$

$$\therefore \quad \text{سے ع} = \frac{\text{ﻫ فـ} \times \frac{\text{ل}}{۲}}{\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \frac{\text{لِ}}{۲}\right)} = \frac{\text{ﻫ فـ} \times \text{ل}}{\text{ل} - \frac{\text{لِ}}{۲}}$$

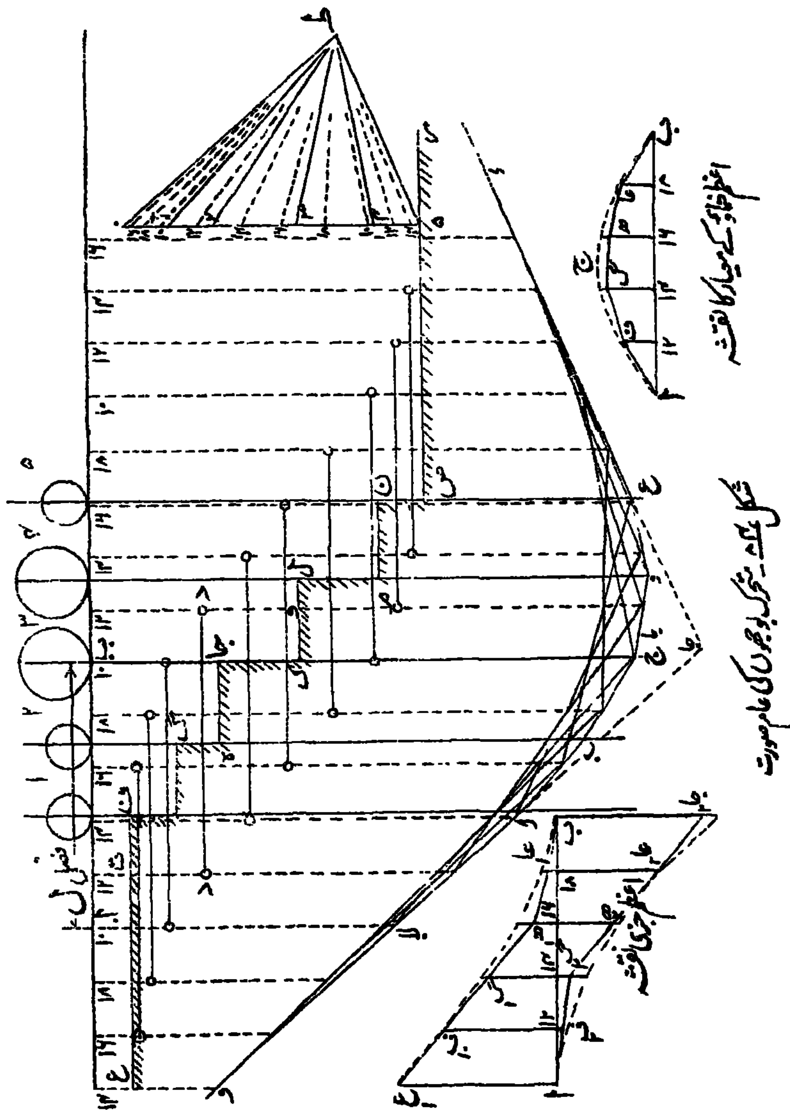
$$\text{سے ع} = \frac{\text{و}}{۴\,\text{ل}} \cdot \frac{\left(\text{ل} - \frac{\text{لِ}}{۲}\right)^{۲}}{\text{ل} - \frac{\text{لِ}}{۲}} \times \text{ل}$$

$$\text{وَ} = \frac{۸\,\text{و}}{۴\,\text{ل}^{۲}} \cdot \frac{\left(\text{ل} - \frac{\text{لِ}}{۲}\right)^{۲}}{\left(\text{ل} - \frac{\text{لِ}}{۲}\right)} \times \text{ل} = \frac{۲\,\text{و}}{\text{ل}}\left(\text{ل} - \frac{\text{لِ}}{۲}\right)$$

(۵) متحرک بوجھوں کی عام صورتیں ـــــ اگر منفرد بوجھوں کا ایک نظام مثلاً حراکوں کے دھروں پر کے بوجھ ایک فصل پر سے گزریں تو نظام کی حرکت کے دوران میں فصل کے ہر نقطے پر کا جز اور خماؤ کا معیار بدلینگے اور ان کی اعظم قیمت معلوم کرنے کے لیے کوئی قاعدہ وضع کرنا ہوگا۔ ان میں سے ایک قاعدہ حسب ذیل ہے:- عملاً ریلوے کمپنیوں میں یہ دستور ہے کہ دھرے پر کا معیاری بوجھ انتخاب کر لیتے ہیں اور یہ اُن کے حراکوں کی تجویز پر مبنی ہوتا ہے۔ اور اس میں وہ ۲½ تا ۱۰ فیصدی کے ممکن اضافے کی رعایت رکھتے ہیں۔ اس کے بعد اعظم جز اور خماؤ کے معیار کے منحنی ترسیمی طور پر کھینچے جاتے ہیں اور ان کے حائط مکافی کھینچ کر ان سے معادل یکساں بوجھ حاصل کیا جاتا ہے۔ نتائج کو ایک جدول یا ایک منحنی کی شکل میں لکھا جاتا ہے اور پلوں کو یکساں بوجھ کے لیے تجویز کیا جاتا ہے۔ جس کی حدت دیے ہوئے فصل کے لیے اس جدول یا منحنی سے حاصل کر لی جاتی ہے۔ گرڈروں کی تجویز والے باب (باب ۱۸) میں ہم چند اعداد و شمار ان جدولوں کے متعلق دینگے۔

اس مسئلے میں نقشے بہت پیچیدہ ہو جاتے ہیں۔ اس لیے ہم اپنے نظام کو پانچ بوجھوں تک محدود رکھینگے یعنی (۱٬۰) (۲٬۱) (۳٬۲) (۴٬۳) اور (۵٬۴) (شکل ۸۴)۔ لہٰذا اس سے زیادہ پیچیدہ ہو تو بھی عمل بالکل یہی رہیگا جو حسب ذیل ہے:- کاغذ کے بالائی کنارے کے قریب بوجھ کے نظام کو کھینچو اور پیمانہ ایسا اختیار کرو کہ بوجھ کے دونوں طرف کم از کم زیر بحث فصل کے مساوی فاصلہ رہے۔ اب بوجھوں کو ایک سمتی خط ۰، ۵ پر قائم کرو اور ایک موزوں قطب ط لے کر کڑیوں کا کثیر الاضلاع و ا ب ج د ع ی کھینچو۔ قطب ط کا بہترین انتخاب وہ ہوگا جس سے کڑیوں کے کثیر الاضلاع کا وسطی حصہ کاغذ کے نچلے کنارے تک پہنچے اور پہلی اور آخری کڑیاں و ا اور ع ی خارج ہو کر فصل کو کاغذ کے کناروں سے ذرا اندر ملیں۔ اب فرض کرو کہ زیر بحث فصل کا طول ل ہے اور فرض کرو کہ ا ب بوجھ کے نظام کی اضافت سے فصل کے

ایک محل کو تعبیر کرتا ہے تب اگر ا اور ب میں سے انتصابی خطوط کھینچے جائیں



جو کڑیوں کے کثیر الاضلاع کو لا اور ما پر قطع کریں اور لا ما کو ملایا جائے تو لا د ب ما فصل پر بوجھ کے دیے ہوئے محل کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ ہوگا۔ اور اگر لا ما کے متوازی ط لا کھینچا جائے تو لا جز کے نقشے کا اساسی خط ہوگا۔ اب فصل کے متعدد نقاط پر خماؤ کے معیار اور جز ناپ لیے جاتے ہیں۔ پھر بوجھ کو فصل کی مسافت سے حرکت دی جاتی ہے، اور خماؤ کے معیار اور جز کے نئے نقشے کھینچے جاتے ہیں، اور دیے ہوئے نقاط پر قیمتیں ناپی جاتی ہیں اور اسی طرح۔ نقشہ کشی کے نقطۂ نظر سے بوجھ کو فصل کے اوپر حرکت دینے سے اس میں بہت زیادہ آسانی ہے کہ فصل کو بوجھ کے نیچے حرکت دی جائے کیونکہ اس صورت میں کڑیوں کے صرف ایک کثیر الاضلاع کا کھینچنا کافی ہے۔ اس طرح عمل حسب ذیل ہوگا:—

خماؤ کا معیار — فصل کو چند مساوی حصوں میں تقسیم کرو۔ عملاً ۱۰ حصے کافی ہونگے لیکن شکل کی پیچیدگی سے بچنے کے لیے ہم یہاں پانچ ہی حصے کرینگے۔ پھر بڑے بوجھوں میں سے ایک سے شروع کرکے ان حصوں کے مساوی طول سارے کاغذ کے عرض پر لو اور ان نقاط میں سے انتصابی خطوط کھینچو۔ یہ انتصابی خطوط شکل میں نقطہ دار دکھائے گئے ہیں۔ اگر ان انتصابی خطوط پر اس طرح نمبر اندازی کی جائے جس طرح شکل میں کی گئی ہے تو ایک ہی نمبر کے قریب ترین انتصابی خطوط کو افقی خط سے ملانے سے فصل حاصل ہوگا۔ اب بند گھیرنے والے خطوط کھینچ لیے جاتے ہیں جو بوجھ کے ہر محل کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ مہیا کرتے ہیں۔ اب ایک طول ا ب لو جو فصل ل کو ظاہر کرے اور اس کو اختیار کردہ تعداد میں تقسیم کرو۔ فصل کی ہر تراش پر اعظم خماؤ کا معیار کیا ہوتا ہے نقشے سے حاصل کرکے اس کو اس پیمانے پر جس کے حاصل کرنے کا طریقہ بتایا جاچکا ہے ا ب کے اوپر ترسیم کرو۔ مثلاً تراش ۱۲ کے لیے اعظم معین ۱۲ ف ہے، وغیرہ۔ اس طرح ا ف ا … ب اعظم خماؤ کے معیار کا منحنی ہے اور اگر یہ مطلوب ہو کہ نتائج کو ایک معادل یکساں بوجھ کی رقوم میں بیان کیا جائے تو اس منحنی کو

گھیرتا ہوا ایک مکافی ا ج د ب کھینچا جاتا ہے - اس کا اعظم یعنی وسطی بعین ب ل²/۸ کو تعبیر کریگا، جہاں ب معادل یکساں بوجھ فی طولی فٹ ہے - اس سے ب محسوب ہو سکتا ہے -

اگر فصل کے حصوں کی تعداد بڑی لی جائے تو پھر اس میں کوئی مضایقہ نہیں کہ حصے شروع کہاں سے کیے جائیں -

اگر کسی حصے کے کسی نقطے پر اعظم خماؤ کے معیار کی قیمت مطلوب ہو تو ذیل کے قاعدے کا استعمال کیا جائیگا :- اعظم خماؤ کا معیار بڑے بوجھوں میں سے ایک کے نیچے واقع ہوگا اور کسی بوجھ کے نیچے کا خماؤ کا معیار اُس وقت اعظم ہوگا جب کہ بوجھ کے نظام کا مرکز جاذبہ اور یہ بوجھ فصل کے مرکز سے مساوی فاصلے پر ہوں -

اس کا ثبوت حسب ذیل ہے :- یہ تو ظاہر ہے کہ فصل کے کسی نقطے پر خماؤ کا معیار اُس وقت اعظم ہوگا جب کہ کوئی بوجھ ٹھیک اُس کے اوپر ہو - یہ ریسانی کثیر الاضلاع کو دیکھنے سے ظاہر ہے - اب فرض کرو کہ بوجھ کے نظام کا مجموعی وزن د ہے اور فرض کرو کہ اس کا مرکز جاذبہ سرے ا سے فاصلہ لا پر ہے اور فرض کرو کہ زیر غور بوجھ و ہے اور مرکز جاذبہ سے فاصلہ ما پر ہے -

تب بوجھ و کے نیچے خماؤ کا معیار

$$م = س_ا (لا + ما) - و \times ما$$

$$= \frac{و (ل - لا)}{ل} (لا + ما) - و ما = و \left\{ لا - \frac{لا (لا + ما)}{ل} \right\}$$

یہ اعظم ہوگا جب کہ $\frac{فر م}{فر لا} = ۰$

یعنی جب $۱ - \frac{۲ لا}{ل} - \frac{ما}{ل} = ۰$

یا لا = (ل - ا)/۲

یعنی جب کہ و اور د مرکز سے مساوی الفصل ہوں۔

بوجھ کے نظام کا مرکز جاذبہ نقطہ جا ہوگا جہاں کہ پہلی اور آخری کڑیاں ملتی ہیں۔ اس طرح اعظم خماؤ کا معیار اس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ فصل کے مرکز کو جا کے اور بوجھوں ۲، ۳ اور ۳، ۴ کے درمیان رکھ کر دیکھیں کہ دونوں میں سے کس سے خماؤ کا معیار زیادہ حاصل ہوتا ہے۔

لیکن صرف یہ عمل کافی نہیں کیونکہ اگرچہ اس سے حقیقی اعظم خماؤ کا معیار ایک یا دو نقطوں پر معلوم ہو جاتا ہے لیکن فصل کے دوسرے نقطوں پر اعظم قیمت معلوم نہیں ہوتی۔

جز۱۔ اعظم جز کا منحنی کھینچنے کے لیے حسب سابق عمل کرو یعنی پہلے بوجھ قائم کرو اور کڑیوں کا کثیر الاضلاع کھینچو۔ پھر سمتی کثیر الاضلاع پر کے نقاط کو اُن کے متناظر حصوں میں خارج کر کے (یعنی ان نقاط میں سے گزرنے والے اُفقی خطوط متناظر حصوں میں کھینچ کر) زینہ دار جزی منحنی ع ف گ ے ہ جا ک ے ل م ن ص س کھینچو جیسا کہ شکل ۸۴ میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو خماؤ کے معیار والے کاغذ پر کھینچ سکتے ہیں یا چاہیں تو علیحدہ کاغذ پر بھی کھینچ سکتے ہیں۔ فصل کے حصوں میں سے جو نقطہ دار انتصابی خطوط کھینچے گئے ہیں اُن سے مختلف محلوں کے لیے خماؤ کے معیار کے نقشوں کے گھیرنے والے اضلاع کا تعین ہوگا۔ اب اِن گھیرنے والے خطوط میں سے ہر ایک کے متوازی ط میں سے خطوط کھینچو۔ یہ ط ۱۰، ط ۱۲، ط ۱۴، وغیرہ ہیں اور نقطہ دار کھینچے گئے ہیں۔ اس طرح جو نقطے ۱۰، ۱۲، ۱۴، وغیرہ ہونگے وہ جز کے لیے اساسی خطوط کا کام دینگے۔ اگر بوجھ فصل سے بہت بڑا ہو تو اتنا کافی ہے کہ یہ خطوط اس نقطے سے کھینچے جائیں جہاں پہلا بوجھ فصل پر آتا ہے، اور اُس نقطے تک کھینچے جائیں جہاں پہلا بڑا بوجھ فصل سے گزر چکا ہو۔ اور نیز منفی جز حاصل کرنے کے لیے اِس نقطے سے جہاں کہ آخری بڑا بوجھ فصل پر آتا ہے اُس نقطے تک عمل کیا جائے جہاں آخری بوجھ فصل سے گزر چکے۔ اب ان نقاط ۱۰، ۱۲،

وغیرہ سے ان کے متناظر حصوں میں افقی خطوط کھینچو اور جزر کے نقشے وہ ہونگے جو ان اساسی خطوط اور زینہ دار جزی منحنی کے درمیان حاصل ہوں۔

مثلاً اساسی خط د د لو۔ تب بوجھ کے اس محل کے لیے جزر کا نقشہ د ت ف گ ہ جاک و د ہوگا۔

اب فصل کے مختلف حصوں پر کے اعظم مثبت اور منفی جزر ناپ کر ایک اساس ا ب پر ترسیم کرو۔ اور نقاط ع ف، وغیرہ اور د، گ ب، وغیرہ کو ملاکر اعظم جزر کے منحنی حاصل کرو۔ اور اگر معادل یکساں بوجھ مطلوب ہو تو ان کو گھیرتا ہوا ایک امکانی کھینچو جو نقطہ دار دکھایا گیا ہے۔

نقشہ کشی کے متعلق نوٹ ــــ عملاً بہترین طریقہ یہ ہوگا کہ کڑیوں کا کثیر الاضلاع احتیاط کے ساتھ ایک بڑے کاغذ پر اتارا جائے اور فصل کے حصوں کو تعبیر کرنے والے انتصابی خطوط ایک چربہ کاغذ پر اتارے جائیں۔ اب خماؤ کے معیار اور جزر کے مختلف نقشوں کا چربہ اتارا جا سکتا ہے اور بہت سی صورتوں میں ان کو فی الحقیقت کھینچنے کی ضرورت نہیں اور ہر نقطے پر کی اعظم قیمت کو ناپ کر اعظم جزر اور خماؤ کے معیار کے منحنیوں میں ترسیم کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح کڑیوں کا ایک کثیر الاضلاع متعدد فصلوں کے لیے کار آمد ہو سکتا ہے۔

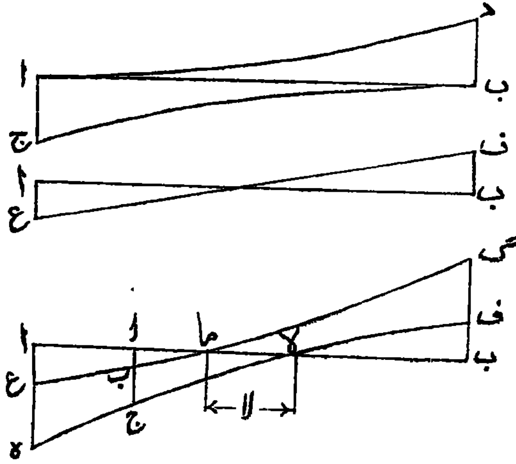
دیکھو اگر پانچ کی بجائے جیسا کہ شکل میں کیا گیا ہے دس حصے لیے جائیں تو اعظم جزر اور خماؤ کے معیار کے نقشوں کی شکل بدل جائیگی۔

اِن عملوں اور ساختوں کے متعلق تفصیلی معلومات کے لیے طالب علم مسٹر ایچ۔ بیمفورڈ ایم۔ ایس سی کے اُن چند مضامین کا مطالعہ کریں جو رسالہ "انجینیرنگ" کی جلد ۸۲ (سنہ ۱۹۰۶ء) میں ہیں اور ایک مضمون جے گریہم ایم۔ آئی۔ سی۔ ای کا انسٹی ٹیوٹ آف سول انجینیرز کی روداد جلد ۱۵۰ میں ہے۔

(۶) متحرک بوجھ اور مردہ بوجھ کے متحدہ نقشے ــــ عملاً متحرک بوجھوں کے ساتھ ساتھ ہمیشہ تعمیر کے وزن کا مردہ بوجھ بھی موجود ہوتا ہے

جس کو متحرک بوجھ کے ساتھ مرکب کر کے حاصل زور معلوم کیے جاتے ہیں۔ مردہ بوجھ کی اہمیت بمقابلہ متحرک بوجھ کے فصل کے بڑھنے سے بڑھتی ہے اور فصل بہت بڑا ہو تو مُردہ بوجھ سے پیدا ہونے والے زور عموماً متحرک بوجھ کے زوروں سے زیادہ ہوتے ہیں۔

ہم اِس صورت پر غور کریں گے کہ گرڈر کا فصل ل ہے اور اس پر ب ٹن فی طولی فٹ کا ایک یکساں متحرک بوجھ گرڈر سے بڑا آتا ہے اور گرڈر پر ایک یکساں بوجھ د ہے۔



شکل ۸۵ - متحرک بوجھ اور مردہ بوجھ ملے ہوئے

جز کے نقشے ــــ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں متحرک بوجھ کے تحت اعظم جز کا نقشہ دو مکافیوں ج ب اور ا د (شکل ۸۵) سے حاصل ہوگا۔ مُردہ بوجھ کے لیے نقشہ، ترچھا خط ع ف ہوگا۔

ان کو ترکیب دینے سے منحنی گ ما ع اور ف لا ھ حاصل ہوتے ہیں جن میں سے ع ا اور ب ف دونوں $\frac{د}{۲}$ کے مساوی ہیں، اور ھ ا اور گ ب دونوں $\frac{د}{۲} + \frac{ب ل}{۲}$ کے مساوی ہیں۔

اگر فصل پر ما اور ا کے درمیان ایک نقطہ ا پر غور کیا جائے تو ا پر جز ہمیشہ منفی ہوگا، اقل قیمت ا ب ہوگی اور اعظم قیمت ا ج۔

نقاط لا اور ما کے درمیان بوجھ کے عبور کے دوران میں جز کی علامت بدلتی ہے اور بعض مصنفوں نے لا ما = لا کو گرڈر کے ما سکی طول سے موسوم کیا ہے۔ اگر گرڈر ایک ڈھانچہ ہو تو دتری ارکان میں زور کے تعاکس کو روکنے کے لیے لا اور ما کے درمیان پس رباطی (Counter bracing) کی ضرورت ہوگی۔

ڈھانچہ دار گرڈروں کی صورت میں متحرک بوجھوں کے اعظم جز کے نقشے معمولی شہتیر سے جس پر ہم نے غور کیا ہے کسی قدر مختلف ہوتے ہیں اور ہم اس مسئلے سے ڈھانچہ دار تعمیروں کے باب میں بحث کرینگے۔ اور باب ۱۰ میں بھی ہم گرڈروں کی تجویز میں متحرک بوجھ کے نقشوں کے استعمال سے مزید بحث کرینگے۔

آٹھواں باب

شہتیروں کے انصراف

ہم وہ ربط معلوم کر چکے ہیں جو شہتیر کے زوروں اور خماؤ کے معیار کے درمیان پایا جاتا ہے۔ اب ہم انصرافوں اور خماؤ کے معیار کا ربط معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

فرض کرو کہ ج جَ (شکل ۸۶) ایک شہتیر کے مرکزی خط کے ایک چھوٹے طول کو تعبیر کرتا ہے جس کا ابتدائی انحنا صفر تھا اور جو اب نصف قطر انحنا ر کے منحنی کی شکل میں مڑ گیا ہے، یہ نصف قطر ر صرف اس چھوٹے طول ج جَ کا ہے

شکل ۸۶

نہ کہ سارے شہتیر کا۔ اگر وہ مفروضات جو اس سے پہلے شہتیروں کے زوروں کے متعلق اختیار کیے گئے یہاں بھی صحیح ہوں تو ب َ ف اور ا ع خماؤ کے بعد بھی خطِ مستقیم ہونگے اور ج جَ کے مرکزِ انحنا ہ پر ملینگے۔ ا ع کے متوازی بَ فَ کھینچو۔ اب قطاع ب بَ ج اور ج جَ ہ پر غور کرو۔

چونکہ ط بہت چھوٹا ہے اس لیے $\frac{ب\,بَ}{بَ\,جَ} = \frac{ج\,جَ}{ج\,ہ}$

یا $\frac{ب\,بَ}{ج\,جَ} = \frac{بَ\,جَ}{ج\,ہ} = \frac{ق}{ہر}$ ......(۱)

لیکن ا ب خماؤ سے پہلے کا طول ہے اس لیے

$\frac{ب\,بَ}{ا\,بَ} = \frac{\text{طول کا اضافہ}}{\text{ابتدائی طول}} = $ ا ب کا فساد

لیکن ابَ = ج جَ

$\therefore \frac{ب\,بَ}{ج\,جَ} =$ ا ب کا فساد $= \frac{ز}{ے}$ جہاں ز کنارے ا ب میں کا زور ہے۔

$\therefore$ اس کو مساوات (۱) میں درج کرنے سے :-

$\frac{ق}{ہر} = \frac{ز}{ے}$

یا $\frac{ز}{ق} = \frac{ے}{ہر}$ ....(۲)

لیکن ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کہ

$م = \frac{ز\,آ}{ق}$

یا $\frac{ز}{ق} = \frac{م}{آ}$

∴ ان نتائج کو اکٹھا کرنے سے

$$\frac{\text{ز}}{\text{ق}} = \frac{\text{م}}{\text{آ}} = \frac{\text{ے}}{\text{ر}} \qquad \text{.......... (۳)}$$

یہ شہتیروں کے زوروں، خماؤ کے معیار، اور نصف قطرِ انحنا کا مکمل ربط ہے۔
عملاً شہتیر کے مختلف نقاط پر نصف قطرِ انحنا معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہوتی بلکہ انصراف مطلوب ہوتا ہے اس لیے ہم اب نصف قطرِ انحنا اور انصراف کا ربط معلوم کرینگے اور اس کے بعد مختلف قسم کے لداؤں کے لیے انصراف معلوم کرینگے۔
یہ بحث دو حصوں میں بٹ جاتی ہے ایک ترسیمی دوسرا ریاضیاتی یا تحلیلی۔ اور ہم ان سے اسی ترتیب میں بحث کرینگے۔
(یہ دونوں بحثیں بجائے خود مکمل ہیں اور طالب علم ان میں سے کسی ایک کو اختیار کر سکتے ہیں)۔

ترسیمی نقطۂ نظر سے بحث

انحنا پر ابتدائی نوٹ ——— فرض کرو کہ ا ب (شکل ۸۶ ک) کوئی منحنی ہے اور اس پر دو نقطے ط، ط۱ باہمی فاصلہ س پر ہیں۔ مماس ط ص اور ط۱ ص۱ کھینچو جو کسی اساسی خط کو ملیں اور اس سے زاویے طہ اور طہ۱ بنائیں۔ اور ان مماسوں کے عماد کھینچو۔ ان عمادوں کا نقطۂ تقاطع چھوٹی قوس ط ط۱ کا مرکزِ انحنا ہوگا۔

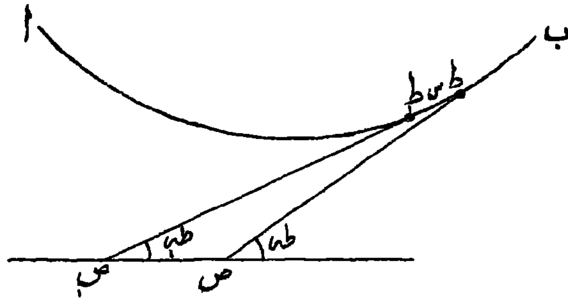
اور مرکز پر ط ط۱ کے محاذی زاویہ (طہ۔طہ۱) بنیگا۔

∴ اگر نصف قطرِ انحنا ر ہو تو ر × (طہ۔طہ۱) = س

یا $\text{ر} = \dfrac{\text{س}}{\text{طہ} - \text{طہ۱}}$

یا $\dfrac{\text{طہ} - \text{طہ۱}}{\text{س}} = \dfrac{1}{\text{ر}}$

اِس $\frac{1}{ہ}$ کو دیے ہوئے نقطہ ہ پر کا انحنا کہا جاتا ہے اور انحنا وہ قیمت ہے جو س کے بے انتہا چھوٹے ہونے پر $\frac{ط_ہ - ط_{ہ_1}}{س}$ اختیار کرتا ہے۔



شکل ۸۶۔ ا

مور کا مسئلہ

اب فرض کرو کہ ا ب ایک طناب ہے جو ایک انتصابی مستوی میں کسی طرح لادی گئی ہے۔ اور

۱ فرض کرو کہ نقاط ط، ط₁ کے درمیان بوجھ و ہے۔ تب ترسیمی سکونیات کے توازن سے یہ لازم آتا ہے کہ طناب اُس کڑیوں کے کثیر الاضلاع کی شکل میں ہوگی جو اس پر کے بوجھ کے نظام کے لیے ایسے قطبی فاصلے کے ساتھ کھینچا جائے جو طناب کے افقی تناؤ کے مساوی ہے (دیکھو صفحہ ۲۵۷)۔

اب فرض کرو کہ طناب میں تناؤ نقاط ط، ط₁ پر ت، ت₁ ہیں۔ تب چونکہ طناب پر کوئی افقی قوت نہیں اس لیے ان تناؤں کے افقی اجزائے تحلیلی مساوی ہونے چاہییں۔ فرض کرو کہ یہ افقی جزوِ تحلیلی ف ہے۔ اور تناؤں کے انتصابی اجزائے تحلیلی کا فرق اُن نقاط کے درمیان کے بوجھ و کے مساوی ہونا چاہیے۔

اس لیے $\text{ف} = \text{ت جم طہ} = \text{ت}_{1}\ \text{جم طہ}_{1}$

$\text{و} = \text{ت جب طہ} - \text{ت}_{1}\ \text{جب طہ}_{1}$

یعنی $$\text{و} = \frac{\text{ف جب طہ}}{\text{جم طہ}} - \frac{\text{ف جب طہ}_{1}}{\text{جم طہ}_{1}}$$

$$= \text{ف}\ (\text{مس طہ} - \text{مس طہ}_{1})$$

اب اگر طہ_{1} اور طہ چھوٹے ہوں جیسا کہ شہتیروں کی صورت میں ہوگا تو ہم $\text{مس طہ}_{1} = \text{طہ}_{1}$ اور $\text{مس طہ} = \text{طہ}$ لے سکتے ہیں۔

اس طرح $\text{و} = \text{ف}\ (\text{طہ} - \text{طہ}_{1})$

$$\therefore \quad \frac{\text{و}}{\text{س}} = \frac{\text{ف}\ (\text{طہ} - \text{طہ}_{1})}{\text{س}}$$

$$= \frac{\text{ف}}{\text{ر}}$$

لیکن $\frac{\text{و}}{\text{س}}$ = بوجھ طناب کے فی اکائی طول = ب فرض کرو

$$\therefore \quad \text{ب} = \frac{\text{ف}}{\text{ر}}$$

یا $$\frac{1}{\text{ر}} = \frac{\text{ب}}{\text{ف}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

اب شہتیر کے مسئلہ پر واپس آؤ۔

مساوات (۳) سے $$\frac{1}{\text{ر}} = \frac{\text{م}}{\text{آ ے}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

مقدار آ × ے محض شہتیر کی شکل اور مادے پر منحصر ہے، اور اس کو خماؤ کی استواری کہا جاتا ہے۔ تب اگر یہ خماؤ کی استواری سارے فصل میں یکساں ہو تو بیان ۲ اور مساواتوں (۴) اور (۵) کا مقابلہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ: ایک لدا ہوا شہتیر وہی شکل اختیار کرے گا جو اسی فصل کی ایک طناب جس پر لداؤ شہتیر کے خماؤ کے معیار کے منحنی کے مطابق ہو اور جس کا افقی تناؤ شہتیر کے خماؤ کی استواری (آ×ے) کے

مساوی ہو۔

یہ مور (Mohr) کا مسئلہ ہے اور شہتیر کی انصرافی شکل شہتیر کا لچک کا خط کہلاتی ہے۔ اِس طرح دیکھو شہتیر کا لچک کا خط حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل عمل کرنا ہوگا:۔

(۱) شہتیر کے خماؤ کے معیار کا منحنی کھینچو۔

(۲) اس منحنی کو پتلی انتصابی پٹیوں میں تقسیم کرو، اور اِن پٹیوں کے وسطی معینوں کو ایک سمتی خط پر قایم کرو اور ایک قطبی فاصلہ خماؤ کی استواری (آ × ے) کے مساوی لو۔

(۳) اس سمتی کثیر الاضلاع کے لیے کڑیوں کا کثیر الاضلاع کھینچو اور اس کو ایک افقی اساس پر تحویل کرو تب یہ کڑیوں کا کثیر الاضلاع لچک کے خط کو ایک خاص پیمانے پر تعبیر کریگا جس کو ہم آگے چل کر معلوم کرینگے۔

فی الحال ہم فرض کرینگے کہ شہتیر کی تراش سارے طول میں یکساں ہے یا یہ کہ خماؤ کی استواری مستقل ہے۔ ایسا نہ ہونے کی صورت میں کیا عمل کیا جاتا ہے یہ ہم آگے چل کر بتائینگے۔

انصرافوں کی معیاری صورتیں

بعض خاص صورتوں میں اعظم انصراف مور (Mohr) کے مسئلہ سے استدلال کرکے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ اور اِن صورتوں سے اب بحث کی جائیگی (شکل ۸۷)۔

(۱) سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر مرکزی بوجھ و۔ فرض کرو کہ ا ب ایک سادہ سہارا ہوا شہتیر ہے جس کا فصل ل ہے اور جس پر ایک مرکزی بوجھ و ہے۔

تب ا د ب خماؤ کے معیار کا نقشہ ہوگا جس کا اعظم معین $\frac{و ل}{۴}$ ہوگا۔

فرض کرو کہ ا ج ب شہتیر کا لچک کا خط ہے۔ تب، مور (Mohr) کے مسئلہ کی رُو سے، اس لچک کے خط کی شکل وہی ہوگی جو اسی فصل کی ایک خیالی طناب کی ہوتی جب پر بوجھ خماؤ کے معیار کے منحنی کے مطابق ہو اور

افقی تناؤ خماؤ کی استواری کے مساوی ہو۔

اب اس طناب کے نصف کی قائمیت پر غور کرو۔ یہ تین قوتوں کے تحت تعادل میں ہے۔ افقی کھینچ ف جو نقطہ ج پر عمل کرتی ہے، نصف طناب پر کا حاصل بوجھ ب، اور نقطہ ا پر کا تناؤ حت۔

ا کے گرد معیار لو تو

$$\text{ف} \times \text{صہ} = \text{ب} \times \text{ما}$$

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{ب} \times \text{ما}}{\text{ف}}$$

موجودہ صورت میں ب = خماؤ کے معیار کے نقشے کے نصف کا رقبہ

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\text{ل}}{2} \times \frac{\text{و ل}}{4} = \frac{\text{و ل}^2}{16}$$

ما = سایہ دار مثلث کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ ا سے

$$= \frac{\text{ل}}{3}$$

$$\text{ف} = \text{آ ے}$$

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{و ل}^2}{16} \times \frac{\text{ل}}{3\ \text{آ ے}} = \frac{\text{و ل}^3}{48\ \text{آ ے}}$$

(۲) سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر یکساں بوجھ —— فرض کرو کہ ا ب ایک سادہ سہارا ہوا شہتیر ہے جس کا فصل ل ہے اور جس پر ایک یکساں پھیلا ہوا بوجھ و ہے۔

خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا جس کا ارتفاع $\frac{\text{و ل}}{8}$ ہوگا۔

تب خیالی طناب کے نصف کی قائمیت پر غور کرنے سے حسب سابق

$$\text{صہ} = \frac{\text{ب} \times \text{ما}}{\text{ف}}$$

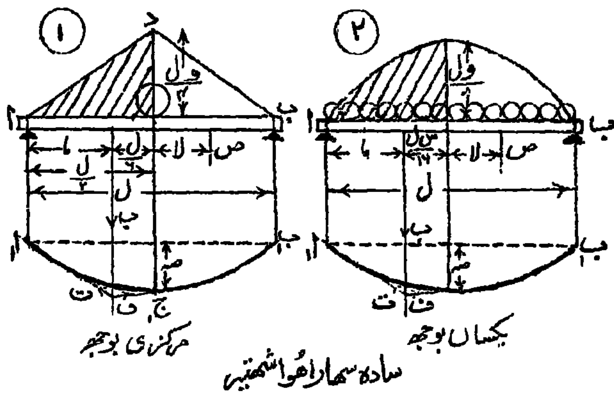
موجودہ صورت میں ب = خماؤ کے معیار کے نقشے کے نصف کا رقبہ

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} ل \times \frac{و ل}{۸} = \frac{و ل^{۲}}{۲۴}$$

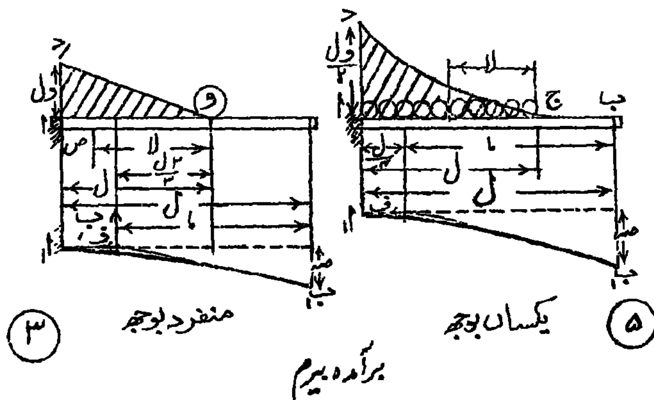
$$ما = \frac{۵}{۱۶} ل$$

$$ف = آ ے$$

$$\therefore \; صہ = \frac{و ل^{۲}}{۲۴} \times \frac{۵ ل}{۱۶ \, آ ے} = \frac{۵ و ل^{۳}}{۳۸۴ \, آ ے}$$



سادہ سہارا ہوا شہتیر



برآمدہ بیرم

شکل ۸۳۔ شہتیروں کے انصراف

(۳) برآمدہ بیرام پر ایک منفرد بوجھ کسی نقطے پر ——

فرض کرو کہ ایک برآمدہ بیرم کا فصل ل ہے اور اس پر ثابت سرے ا سے فاصلہ ل پر ایک بوجھ و ہے۔

تب خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مثلث ہوگا جس میں ا د = و ل۔ اور ا ب شہتیر کے لچک کے خط اور خیالی طناب کو تعبیر کرتا ہے۔ اس صورت میں ہم کو یہ تصور کرنا ہوگا کہ بوجھ اوپر کو عمل کرتا ہے۔

رسی ا ا پر افقی ہے۔

ب کے گرد معیار لو۔ تب حسب سابق

$$ف \times صہ = ب \times ما$$

$$یا \quad صہ = \frac{ب \times ما}{ف}$$

موجودہ صورت میں ب = خماؤ کے معیار کے نقشے ا ج د کا رقبہ

$$= \frac{و ل \times ل}{۲} = \frac{و ل^۲}{۲}$$

$$ما = ل - \frac{ل}{۳}$$

$$ف = آ ے$$

$$\therefore صہ = \frac{و ل^۲}{۲ آ ے} \left(ل - \frac{ل}{۳}\right)$$

دیکھو اس صورت میں شہتیر کا حصہ ج ب مستقیم ہوگا۔

(۴) برآمدہ بیرم پر منفرد بوجھ آزاد سرے پر

یہ گزشتہ صورت کی خاص شکل ہے جس میں ل = ل

$$\therefore صہ = \frac{و ل^۲}{۲ آ ے} \left(ل - \frac{ل}{۳}\right)$$

$$= \frac{و ل^۳}{۳ آ ے}$$

(۵) برآمدہ بیرام پر یکساں بوجھ ثابت سہارے سے کسی نقطے تک — فرض کرو کہ اب ایک برآمدہ بیرام ہے جس کا فصل ل ہے جس پر ایک بوجھ و ثابت سرے ا سے نقطہ ج تک یعنی طول ل پر یکساں پھیلا ہوا ہے۔

تب حسب سابق:

$$\text{صد} = \frac{\text{ب ما}}{\text{ف}}$$

موجودہ صورت میں ب = خاؤ کے معیار کے منحنی اج د کا رقبہ

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\text{و ل}}{2} \times \text{ل} = \frac{\text{و ل}^2}{6}$$

$$\text{ما} = \text{ل} - \frac{\text{ل}}{4}$$

$$\text{ف} = \text{آ ے}$$

$$\therefore \quad \text{صد} = \frac{\text{و ل}^2}{6\,\text{آ ے}} \left(\text{ل} - \frac{\text{ل}}{4}\right)$$

(۶) برآمدہ بیرام پر یکساں بوجھ سارے طول پر —

یہ گزشتہ صورت کی ایک خاص شکل ہے جس میں ل = ل

$$\therefore \quad \text{صد} = \frac{\text{و ل}^2}{6\,\text{آ ے}} \left(\text{ل} - \frac{\text{ل}}{4}\right)$$

$$= \frac{\text{و ل}^2}{6\,\text{آ ے}} \times \frac{3\,\text{ل}}{4} = \frac{\text{و ل}^3}{8\,\text{آ ے}}$$

(۷)* سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر منفرد بوجھ کسی مقام پر —

اس صورت میں استدلال کسی قدر طویل ہے لیکن اس کے علاوہ اور کوئی مشکل نہیں۔

پہلا اہم نکتہ یہ ہے کہ اعظم انصراف بوجھ کے نیچے واقع نہیں ہوگا۔ اور چونکہ تقریباً ہمیشہ اعظم انصراف ہی کی ضرورت ہوتی ہے اس لیے عین بوجھ کے نیچے کا انصراف معلوم کرنا تقریباً بے کار ہے۔ اگرچہ کہ اکثر معلوم کیا جاتا ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی شہتیر کے خماؤ کے معیار کے منحنی یا کڑیوں کے کثیر الاضلاع کا معین اعظم اُس مقام پر ہوتا ہے جہاں جز صفر ہو۔ اِس لیے اگر خماؤ کے معیار کے منحنی کو لداؤ کا منحنی مانا جائے تو اعظم انصراف اُس مقام پر ہوگا جہاں اس لداؤ کی وجہ سے جز صفر ہو۔

فرض کرو کہ فصل ل کے ایک شہتیر ا ب پر ایک نقطہ ج پر جس کے فاصلے ا اور ب سے ا اور ب ہیں ایک بوجھ و رکھا گیا ہے (شکل ۸۸)۔ تب ا ع ب خماؤ کے معیار کا نقشہ ہوگا جس میں ج ع = $\frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}}$ ۔ اِس خماؤ کے معیار کے نقشے کو بوجھ کا نقشہ تصور کریں تو اِس سے تعبیر ہونے والا مجموعی بوجھ =

$$\triangle \text{ا ع ب کا رقبہ} = \frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}} \times \frac{\text{ل}}{۲} = \frac{\text{و ا ب}}{۲}$$

شکل ۸۸

اور یہ مثلث کے مرکزِ ہندسی گ پر عمل کریگا۔

اس نقطہ گ میں کا انتصابی خط ج سے فاصلہ $\frac{۲}{۳}$ س ج پر ہوگا جہاں س شہتیر کا وسطی نقطہ ہے۔ اِس طرح اِس مرکزِ ہندسی کا فاصلہ ب سے

$$= ب + \frac{۲}{۳}\left(\frac{ل}{۲} - ب\right) = \frac{ل}{۳} + \frac{ب}{۳} = \frac{ل+ب}{۳}$$

اس لیے اِس خیالی بوجھ کی وجہ سے ا پر کا ردِّ عمل

$$= \frac{\text{مجموعی بوجھ}}{ل} \times \frac{(ل+ب)}{۳} = \frac{و ا ب}{۲ل} \times \frac{ل+ب}{۳}$$

اب فرض کرو کہ انحراف ا سے فاصلہ لا پر نقطہ د پر اعظم ہوتا ہے۔

تب اِس نقطے پر جز صفر ہوگا۔

یعنی $ر_۱ - \frac{لا}{۲} \times ک ہ = ۰$

یا $\frac{و ا ب}{۲ل}\left(\frac{ل+ب}{۳}\right) - \frac{لا}{۲} \times \frac{و ب لا}{ل} = ۰$

یا $\frac{ا(ل+ب)}{۳} = لا^۲$

یعنی $لا = \sqrt{\frac{ا(ل+ب)}{۳}}$

اب اعظم انحراف صہ اِس طرح حاصل ہوگا کہ خیالی طناب کے حصہ ا د کی قائمیت پر غور کریں۔

حسب سابق $صہ = \frac{ب \times ا}{ف}$

موجودہ صورت میں جا = رقبہ ا ک ہ

$$= \frac{و ب لا}{ل} \times \frac{لا}{۲} = \frac{و ب لا^۲}{۲ل}$$

$$= \frac{\text{و ب ا (ل + ب)}}{\text{ل}^{۲}} = \frac{\text{و ا ب (ل + ب)}}{\text{ل}^{۲}}$$

$$\text{ما} = \frac{۲}{۳}\,\text{لا}$$

$$= \frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{\text{ا (ل + ب)}}{۳}}$$

$$\text{ف} = \text{آ ے}$$

$$\therefore\ \text{صہ} = \frac{\text{و ا ب (ل + ب)}}{\text{ل}^{۲}} \times \frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{\text{ا (ل + ب)}}{۳}} \times \frac{۱}{\text{آ ے}}$$

$$= \frac{\text{و ب}}{\text{۳ آ ے ل}}\left\{\frac{\text{ا (ل + ب)}}{۳}\right\}^{\frac{۳}{۲}}$$

استعمال کی غرض سے اس کو کسی قدر سادہ شکل میں یوں رکھ سکتے ہیں:

رکھو $\text{ا} = \text{عہ ل}$ ، تب $\text{ب} = \text{(۱ - عہ) ل}$

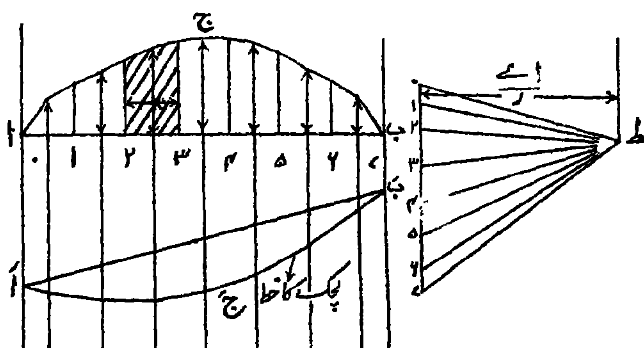
اور
$$\text{صہ} = \frac{\text{و (۱ - عہ)}}{\text{۳ آ ے}}\left\{\frac{\text{عہ ل (۲ - عہ) ل}}{۳}\right\}^{\frac{۳}{۲}}$$

$$= \frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{۳ آ ے}}\,\text{(۱ - عہ)}\left\{\frac{\text{۲ عہ} - \text{عہ}^{۲}}{۳}\right\}^{\frac{۳}{۲}}$$

شہتیروں کے انحرافوں کے متعلق مور کے مسئلے کے مزید استعمالات کے لیے دیکھو ضمیمہ صفحہ (   )۔

ترسیمی عمل کسی لداؤ کے لیے —— فرض کرو کہ کسی دیے ہوئے بوجھ کے نظام کے لیے خماؤ کے معیار کا منحنی ا ج ب ہے۔ قاعدے کو چند مساوی حصوں میں تقسیم کرو۔ اور فرض کرو کہ ہر ایک حصے کا طول ع ہے۔

حصوں کی تعداد اتنی ہو کہ خماؤ کے معیار کے نقشے کا ہر ایک حصہ تقریباً ایک مستطیل ہو۔ اب ہر ایک حصے کے وسطی معینوں کو نسبت ۱/ن میں گھٹا کر ایک سمتی خط پر قائم کرو۔ یہ معین اس لیے گھٹائے گئے ہیں کہ سمتی نقشہ ایک معقول جسامت کا رہے بہت بڑا نہ ہو جائے۔

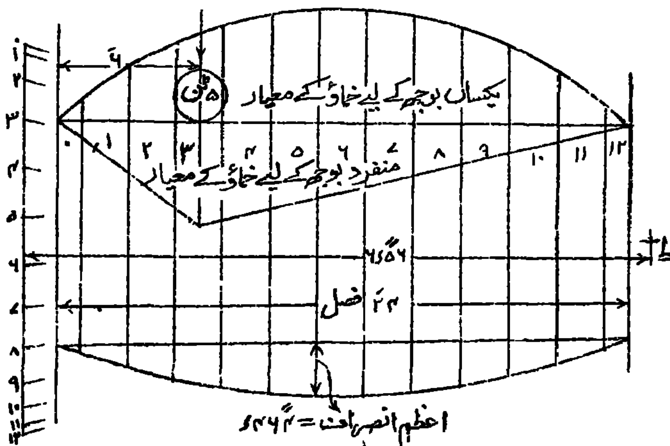


شکل ۸۹۔ انصرافوں کے لیے ترسیمی عمل

اب فرض کرو کہ فصل کا پیمانہ ۱" = لا فٹ ہے، اور خماؤ کے معیار کا پیمانہ ۱" = ما فٹ ٹن ہے۔ تب اگر خماؤ کے معیار کے نقشے کے کسی حصے مثلاً ۲، ۳ پر غور کریں تو اس حصے کا رقبہ ع × وسطی معین ہوگا۔ اس طرح چونکہ کسی دیے ہوئے پیمانہ پر ہر حصے کا رقبہ اس کے وسطی معین کے متناسب ہوگا اس لیے وسطی معین کا ایک انچ ع × لا × ما مربع فٹ × ٹن کو تعبیر کریگا۔ اور چونکہ سمتی خط کا ہر ایک حصہ معینوں کا ۱/ن ہے اس لیے سمتی خط کا حصہ ۲، ۳ خماؤ کے معیار کے نقشے کے متناظر حصے کو پیمانہ ۱" = ن × ع × لا × ما مربع فٹ × ٹن کو تعبیر کریگا۔ اب اس پیمانے پر آ ے کا طول محسوب کرو۔ یہ طول بہت بڑا ہوگا اور عملی استعمال کے لیے ناموزوں ہوگا اس لیے قطب ط فاصلہ آ ے / ر پر لو جہاں ر ایک موزوں عدد صحیح ہے۔ اس قطب ط کو لے کر ترسیمی کثیر الاضلاع ا' ج' ب' کھینچو۔ تب یہ اس دیے ہوئے لداؤ کے لیے شہتیر کا لچک کا خط ہوگا، یا زیادہ صحیح

یہ کہنا ہوگا کہ ا ج ب کو ایک اُفقی قاعدے پر تحویل کیا جائے تو لچک کا خط حاصل ہوگا۔
انصرافوں کا پیمانہ یوں حاصل ہوگا:۔
اگر قطبی فاصلہ آ ہے کے مساوی لیاجاتا تو انصراف فصل کے پیمانے
اً = لا فٹ پر ہوتے لیکن چونکہ قطبی فاصلہ آ ہے/ر ہے اس لیے انصرافوں کا
پیمانہ اً = لا/ر فٹ ہوگا۔ ذیل کی عددی مثال سے پیمانے کے سوال کی مشکل
دُور ہوجائیگی:۔

عددی مثال — ایک ۶" × ۶" × ۶۲ پونڈ کی بیلی فولاد کی کڑی پر
جس کا فصل ۲۴ فٹ ہے (اس کے ذاتی وزن سمیت) ۸ ٹن کا ایک پھیلا ہوا
بوجھ ہے اور ۵ ٹن کا ایک منفرد بوجھ بائیں سہارے سے ۶ فٹ کے
فاصلہ پر ہے۔ اعظم انصراف معلوم کرو۔ (شکل ۹۰)۔



شکل ۹۰۔ انصرافوں پر مثال۔

اس صورت میں ہے = ۱۲۵۰۰ ٹن فی مربع انچ
آ = ۲۵۰۷ انچ اکائیاں

آ ہے = $\frac{۲۵۰۷ \times ۱۲۵۰۰}{۱۴۴}$ = ۲۲۹۸۰ مربع فٹ ٹن

پہلے ہر ایک بوجھ کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ کھینچو۔ اس کے لیے کوئی طولی پیمانہ مثلاً ۱" = ۴ فٹ، اور کوئی خماؤ کے معیار کا پیمانہ مثلاً ۱" = ۲۰ فٹ ٹن لو۔ اب خماؤ کے معیار کے نقشے کو چند مساوی حصوں میں تقسیم کرو، مثلاً ۱۲ حصوں میں، اور ہر ایک حصے کا وسطی معین کھینچو۔ اب معینوں کو قوتوں کے خطوط سمجھ کر ایک سمتی خط پر کسی تحویلی پیمانے مثلاً $\frac{1}{4}$ پر ۰، ۱، ۲، ... تا ۱۲ قائم کرو۔

تب سمتی خط کا ایک انچ $\frac{20 \times 4 \times 4}{2} = 160$ مربع فٹ ٹن کو تعبیر کریگا کیونکہ قاعدے کا ہر ایک حصہ $\frac{1}{2}$ انچ ہے۔

$\therefore$ اس پیمانے پر آئے $= \frac{62980}{160} = 393.67$ انچ

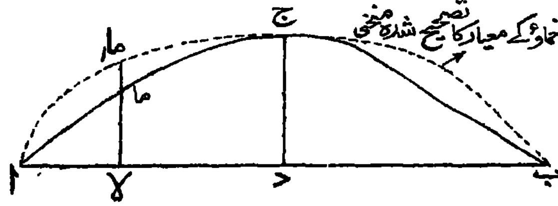
صریحاً یہ طول تکثیف وہ ہے اس لیے $\frac{393.67}{60} = 6.56$ انچ تو تب رسیانی کثیر الاضلاع کا ایک انچ $\frac{4}{60}$ انچ انصراف کو تعبیر کریگا۔ پیمائش سے پایا جائیگا کہ رسیانی کثیر الاضلاع کا اعظم معین ۵۸ء۰ انچ ہے۔ اس لیے

اعظم انصراف $= 0.58 \times 8 = 4.64$ انچ

تراش کی تبدیلی کی رعایت ـــــ اب تک جتنی صورتوں پر غور کیا گیا اس مفروضے کے ساتھ کہ تراش مستقل ہے یا زیادہ صحیح یہ کہ معیار جمود آسارے فصل میں مستقل ہے۔ اگر یہ صورت نہ ہو تو انصراف کو صحیح طور پر معلوم کرنے کے لیے پہلے خماؤ کے معیار کے منحنی میں اس طرح ترمیم کرنی ہوگی کہ تراش کی تبدیلی کی رعایت ہوجائے اور اس کا طریقہ حسب ذیل ہے :-

فرض کرو کہ کسی شہتیر ا ب کے خماؤ کے معیار کا منحنی ا ج ب ہے (شکل ۹۱) اور فرض کرو کہ اعظم معیار جمود آد ہے جو د پر واقع ہوتا ہے۔ تب شہتیر پر کوئی نقطہ لو جس پر خماؤ کا معیار لا ما ہے اور معیار جمود آہ ہے اور لا ما، ایسا معلوم کرو کہ $\text{لا ما}_1 = \frac{\text{لا ما} \times \text{آد}}{\text{آلا}}$۔ یہی عمل فصل کے متعدد نقطوں پر کرو

اور ما۱ کے جیسے جو نقطے حاصل ہونگے اُن کو ملاؤ۔ اِس طرح خماؤ کے معیار کا مصححہ منحنی



شکل ۹۱

حاصل ہوگا جس سے انصراف اوپر دیے ہوئے عمل کے ذریعے حاصل ہو سکینگے۔ اِس عمل میں آ سے حاصل کرنے میں آ کی قیمت آ و لی جاتی ہے۔

یکساں مضبوطی اور مستقل گہرائی کے گرڈروں کے انصراف۔

اگر کسی شہتیر کی تراش اس طرح بدلے کہ اعظم زور سارے فصل میں یکساں ہوں تو صریحاً تراش کا مقیاس خماؤ کے معیار کے متناسب ہوگا اور اس طرح نسبت $\frac{م}{مق}$ مستقل ہوگی۔ اگر گرڈر کی گہرائی بھی مستقل ہو تو نسبت $\frac{م}{آ}$ بھی مستقل ہوگی۔

اِس صورت میں خماؤ کے معیار کا مصححہ منحنی ایک مستطیل ہوگا اور انصراف

مور (Mohr) کے مسئلے سے اِس طرح معلوم ہو سکتے ہیں:۔

گزشتہ صورتوں کی طرح صہ $= \frac{ب \times ما}{آ ے}$

موجودہ صورت میں ب $= \frac{م \times ل}{۲}$ اور ما $= \frac{ل}{۴}$ کیونکہ منحنی ایک مستطیل ہے۔

$$\therefore \quad صہ = \frac{م\, ل^{۲}}{۸\, آ ے}$$

یکساں لداؤ کی صورت میں $\text{م} = \frac{\text{و ل}}{۸}$

$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{و ل}^{۳}}{۶۴ \, \text{آ سے}}$

مرکزی بوجھ کی صورت میں $\text{م} = \frac{\text{و ل}}{۴}$

$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{و ل}^{۳}}{۳۲ \, \text{آ سے}}$

اِس ربط کا ایک اور آسان ثبوت صفحہ ۲۸۴ پر ملیگا۔
مزید عددی مثالیں اس باب کے آخر میں دی جائینگی۔

انحراف ریاضیاتی نقطۂ نظر سے

مساوات (۳) سے $\frac{\text{م}}{\text{آ سے}} = \frac{۱}{\text{ر}}$

اب اگر ر بڑا ہو، جیسا کہ اِس صورت میں ہوگا تو $\frac{۱}{\text{ر}} = \frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$

$\therefore \quad \frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = \frac{\text{م}}{\text{آ سے}}$

$\therefore \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{شہتیر کا ڈھال} = \int \frac{\text{م فر لا}}{\text{آ سے}}$

$\text{ما} = \text{شہتیر کا انحراف} = \iint \frac{\text{م فر لا فر لا}}{\text{آ سے}}$

اب ذیل کی معیاری صورتوں پر غور کرو (دیکھو شکل ۸۷)۔

(۱) سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر مرکزی بوجھ و۔ شہتیر کے مرکز سے فاصلہ لا پر ایک نقطہ ص پر غور کرو۔

تب $م = \frac{و}{۲}\left(\frac{ل}{۲} - لا\right)$

$\therefore \iint م\, فلا\, فلا = \iint \frac{و}{۲}\left(\frac{ل}{۲} - لا\right) فلا\, فلا$

$\int \frac{و}{۲}\left(\frac{ل}{۲} - لا\right) فلا = \frac{و ل لا}{۴} - \frac{و لا^۲}{۴} + ج_۱$

$\therefore \iint \frac{و}{۲}\left(\frac{ل}{۲} - لا\right) فلا\, فلا = \int \frac{و ل لا}{۴} فلا - \int \frac{و لا^۲}{۴} فلا + \int ج_۱ فلا$

$= \frac{و ل لا^۲}{۸} - \frac{و لا^۳}{۱۲} + ج_۱ لا + ج_۲$

لا = ۰ پر ڈھال صفر ہے اس لیے $ج_۱ = ۰$۔ اور $لا = \pm \frac{ل}{۲}$ پر انحراف صفر ہے اس لیے

$\frac{و ل^۳}{۳۲} - \frac{و ل^۳}{۹۶} + ج_۲ = ۰$

یعنی $ج_۲ = \frac{-و ل^۳}{۴۸}$

اعظم انحراف لا = ۰ پر ہوتا ہے اس لیے

$ص = \frac{-ج_۲}{آ ے} = \frac{و ل^۳}{۴۸ آ ے}$

(۲) سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر یکساں بوجھ ــــ حسب سابق

مرکز سے فاصلہ لا پر ایک نقطہ لینے سے

$م = \frac{ب ل}{۲}\left(\frac{ل}{۲} - لا\right) - \frac{ب}{۲}\left(\frac{ل}{۲} - لا\right)^۲$

$= \frac{ب}{۲}\left(\frac{ل}{۲} - لا\right)\left(ل - \frac{ل}{۲} + لا\right)$

$= \frac{ب}{۲}\left(\frac{ل^۲}{۴} - لا^۲\right)$

$$\int م\ فرلا = \frac{ب ل^2 لا}{8} - \frac{ب لا^3}{6} + ج_1$$

اور حسب سابق $ج_1 = 0$

$$\therefore \int\int م\ فرلا\ فرلا = \int \frac{ب ل^2 لا}{8} فرلا - \int \frac{ب لا^3}{6} فرلا$$

$$= \frac{ب ل^2 لا^2}{16} - \frac{ب لا^4}{24} + ج_2$$

$= 0$ جب کہ $لا = \frac{ل}{2}$

$$\therefore \quad - ج_2 = \frac{ب ل^4}{64} - \frac{ب ل^4}{384}$$

$$= ب ل^4 \left\{\frac{6-1}{384}\right\} = \frac{5 ب ل^4}{384}$$

تب اعظم انحراف $لا = 0$ پر واقع ہوتا ہے اِس لیے

$$ص = \frac{-ج_2}{آ ے} = \frac{5 ب ل^4}{384 آ ے} = \frac{5 و ل^3}{384 آ ے}$$

(۳) برآمدہ بیرم پر منفرد بوجھ کسی مقام پر۔ بوجھ سے فاصلہ لا پر نقطۂ ص پر غور کرو۔

$$م = - و لا$$

$$\therefore ڈھال \times آ ے = \int م\ فرلا$$

$$= - \frac{و لا^2}{2} + ج_1$$

$لا = ل$ پر ڈھال $= 0$

$$\therefore \quad ج_1 = \frac{و ل^2}{2}$$

$$\therefore آ ے \times بوجھ\ کے\ نیچے\ ڈھال = \frac{و ل^2}{2}$$

$$\text{انصراف} = \iint \frac{\text{ہر فلا فلا}}{\text{آ ے}}$$

$$= \left(-\frac{\text{و لا}^{3}}{\text{۶}} + \frac{\text{و ل}^{2}\text{لا}}{\text{۲}} + \text{ج}_{2}\right) \times \frac{\text{۱}}{\text{آ ے}}$$

لا = ل پر انصراف = ۰

$$\therefore \quad \text{ج}_{2} = \frac{\text{و ل}^{3}}{\text{۶}} - \frac{\text{و ل}^{3}}{\text{۲}} = -\frac{\text{و ل}^{3}}{\text{۳}}$$

∴ لا = ۰ پر یعنی بوجھ کے نیچے انصراف

$$= \frac{\text{ج}_{2}}{\text{آ ے}} = -\frac{\text{و ل}^{3}}{\text{۳}} \times \frac{\text{۱}}{\text{آ ے}}$$

آزاد سرے پر انصراف = بوجھ کے نیچے انصراف + بوجھ کے نیچے ڈھال × (ل - ل)

$$= \left\{-\frac{\text{و ل}^{3}}{\text{۳}} - \frac{\text{و ل}^{2}}{\text{۲}}(\text{ل} - \text{ل})\right\} \frac{\text{۱}}{\text{آ ے}}$$

$$= -\frac{\text{و}}{\text{آ ے}} \left\{\frac{\text{ل}^{2}\text{ل}}{\text{۲}} - \frac{\text{ل}^{3}}{\text{۶}}\right\}$$

$$= -\frac{\text{و ل}^{2}}{\text{۲ آ ے}} \left(\text{ل} - \frac{\text{ل}}{\text{۳}}\right)$$

منفی علامت سے صرف یہ ظاہر ہوتا ہے کہ انصراف نیچے کی جانب ہے۔ اس کو نظر انداز کرنے سے

$$\text{اعظم انصراف} = \text{صہ} = \frac{\text{و ل}^{2}}{\text{۲ آ ے}} \left(\text{ل} - \frac{\text{ل}}{\text{۳}}\right)$$

(۴) برآمدہ بیرم کے آزاد سرے پر منفرد بوجھ —— یہ اوپر کی صورت میں ل = ل رکھنے سے حاصل ہوگا۔ یعنی

$$\text{صد} = \frac{\text{و ل}^3}{3\,\text{آ ے}}$$

(۵) برآمدہ بیرم پر یکساں بوجھ ثابت سرے سے کسی نقطے طول تک۔

اس صورت میں $\text{ھ} = \frac{-\text{ب لا}^2}{2}$

$\therefore$ ڈھال × آ ے = $\int \text{ھ فرلا}$

$$= \frac{-\text{ب لا}^3}{6} + \text{ج}_1$$

لا = ل پر ڈھال = ۰

$$\therefore \quad \text{ج}_1 = \frac{\text{ب ل}^3}{6}$$

$\therefore$ آ ے × بوجھ کے نیچے ڈھال = $\frac{\text{ب ل}^3}{6}$

آ ے × انصراف = $\int\int \text{ھ فرلا فرلا}$

$$= \frac{-\text{ب لا}^4}{24} + \frac{\text{ب ل}^3\,\text{لا}}{6} + \text{ج}_2$$

لا = ل پر انصراف = ۰

$$\therefore \quad \text{ج}_2 = \frac{\text{ب ل}^4}{24} - \frac{\text{ب ل}^4}{6} = \frac{-\text{ب ل}^4}{8}$$

$\therefore$ آ ے × بوجھ کے نیچے انصراف، (جہاں لا = ۰)

$$= \text{ج}_2 = \frac{-\text{ب ل}^4}{8}$$

$\therefore$ آ ے × آزاد سرے پر انصراف = $\frac{-\text{ب ل}^4}{8}$ + آ ے × بوجھ کے نیچے ڈھال × (ل - ل)

$$= \frac{-\text{ب ل}^4}{8} + (\text{ل} - \text{ل})\left(\frac{-\text{ب ل}^3}{6}\right)$$

$$= \frac{-ب ل^3}{2} \left\{ \frac{ل}{3} - \frac{ل}{3} + \frac{ل}{4} \right\}$$

$$= \frac{-ب ل^3}{2} \left\{ \frac{ل}{12} - \frac{ل}{3} \right\}$$

$$= \frac{-ب ل^3}{6} \left(ل - \frac{ل}{4} \right)$$

$$= \frac{-و ل^2}{6} \left(ل - \frac{ل}{4} \right)$$

منفی علامت کو نظر انداز کرنے سے

$$صہ = \frac{و ل^2}{6 آ ے} \left(ل - \frac{ل}{4} \right)$$

(۶) بر آمدہ بیرم کے سارے طول پر یکساں بوجھ —

یہ گزشتہ صورت میں ل = ل رکھنے سے حاصل ہوگا۔

$$\therefore صہ = \frac{و ل^3}{6 آ ے} \left(ل - \frac{ل}{4} \right)$$

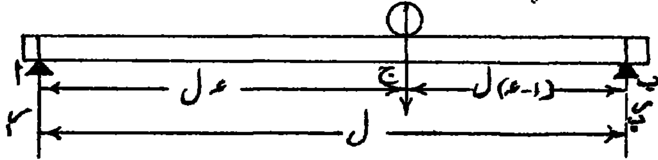
$$= \frac{و ل^3}{8 آ ے}$$

(۷) سادہ سہارے ہوئے شہتیر پر منفرد بوجھ کسی نقطے پر۔

فرض کرو کہ فصل ل کے ایک شہتیر ا ب کے ایک نقطہ ج پر جس کا فاصلہ ا سے ع ل ہے بوجھ و رکھا گیا ہے (شکل ۹۲ع)۔ ب سے اس کا فاصلہ (۱-ع) ل ہوگا۔

$$تب \quad ی_ب = \frac{و ع ل}{ل} = و ع$$

$$\text{ر}_{\text{ا}} = \frac{\text{و(ا-ع)ل}}{\text{ل}} = \text{و(ا-ع)}$$



شکل ۹۲

ا اور ج کے درمیان ا سے فاصلہ لا پر ایک نقطہ پر غور کرو۔

$$\text{م}_{\text{لا}} = \text{ر}_{\text{ا}} \times \text{لا} = \text{و(ا-ع) لا}$$

$$\therefore \text{آ ے} \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = \text{و(ا-ع) لا} \quad \ldots\ldots (۱)$$

$$\therefore \text{آ ے} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{و(ا-ع) لا}^{2}}{۲} + \text{ج}_{۱} \quad \ldots\ldots (۲)$$

$$\text{آ ے ما} = \frac{\text{و(ا-ع) لا}^{3}}{۶} + \text{ج}_{۱}\text{لا} + \text{ج}_{۲} \quad \ldots\ldots (۳)$$

اب ج اور ب کے درمیان ا سے فاصلہ $\text{لا}_{۱}$ پر ایک نقطے پر غور کرو۔

$$\text{م}_{\text{لا}_{۱}} = \text{ر}_{\text{ا}} \times \text{لا}_{۱} - \text{و(لا}_{۱} - \text{ع ل)}$$

$$= \text{و(ا-ع) لا}_{۱} - \text{و لا}_{۱} + \text{و ع ل}$$

$$= \text{و ع ل} - \text{و ع لا}_{۱}$$

$$\therefore \text{آ ے} \frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}_{۱}^{2}} = \text{و ع ل} - \text{و ع لا}_{۱} \quad \ldots\ldots (۴)$$

$$\therefore \text{آ ے} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{و ع ل لا}_{۱} - \text{و ع} \frac{\text{لا}_{۱}^{2}}{۲} + \text{ج}_{۳} \quad \ldots\ldots (۵)$$

آگے $\text{ما} = \frac{\text{و ع ل لا}_1^2}{۲} - \frac{\text{و ع لا}_1^3}{۶} + \text{ج}_3\,\text{لا}_1 + \text{ج}_4$ ......(۶)

مساوات (۳) میں چونکہ لا = ۰ پر ما = ۰ اس لیے

$$\text{ج}_2 = ۰$$

مساوات (۶) میں چونکہ لا = ل پر $\text{ما}_2 = ۰$ اس لیے

$$\frac{\text{و ع ل}^3}{۲} - \frac{\text{و ع ل}^3}{۶} + \text{ج}_3\,\text{ل} + \text{ج}_4 = ۰$$

$$\therefore \quad \text{ج}_4 = \frac{-\text{و ع ل}^3}{۳} - \text{ج}_3\,\text{ل} \quad ......(۷)$$

یہ دو مساواتیں لچک کے خط کے اُن حصوں کو تعبیر کرتی ہیں جن میں سے ایک بوجھ کے اس طرف ہے اور ایک اُس طرف۔

ان کے ڈھال اور معین ان کے مشترک نقطے

$$\text{لا} = \text{لا}_1 = \text{ع ل}$$

پر دونوں حصوں میں مساوی ہونگے اس لیے لا اور لا_1 کی اِس قیمت کو مساوات (۴) اور (۵) میں رکھ کر دونوں کو مساوی رکھنے سے:

$$\frac{\text{و}(۱-\text{ع})\text{ع}^2\text{ل}^2}{۲} + \text{ج}_1 = \text{و ع}^2\text{ل}^2 - \frac{\text{و ع}^3\text{ل}^2}{۲} + \text{ج}_3$$

یعنی

$$\text{ج}_1 = \frac{\text{و ع}^2\text{ل}^2}{۲} + \text{ج}_3 \quad ......(۸)$$

اسی طرح مساواتوں (۳) اور (۶) سے حاصل ہوگا:

$$\frac{\text{و}(۱-\text{ع})\text{ع}^3\text{ل}^3}{۶} + \text{ج}_1\,\text{ع ل} = \frac{\text{و ع}^3\text{ل}^3}{۲} - \frac{\text{و ع}^3\text{ل}^3}{۶} + \text{ج}_3\,\text{ع ل} + \text{ج}_4$$

$$\therefore \quad \text{ج}_1\,\text{ع ل} = \frac{\text{و ع}^3\text{ل}^3}{۳} + \text{ج}_3\,\text{ع ل} - \frac{\text{و ع ل}^3}{۳} - \text{ج}_3\,\text{ل}$$

$$\text{ج}_1\,\text{ع} = \frac{\text{و ع}^3\text{ل}^2}{۳} - \frac{\text{و ع ل}^2}{۳} + \text{ج}_3\,(\text{ع}-۱)$$

$$= \frac{\text{و ع}^3\text{ل}^2}{۳} - \frac{\text{و ع ل}^2}{۳} + \left(\text{ج}_1 - \frac{\text{و ع}^2\text{ل}^2}{۲}\right)(\text{ع}-۱)$$

$$\therefore\ ج_{۱} = \frac{و\,ع^{۳}\,ل^{۲}}{۳} - \frac{و\,ع\,ل^{۲}}{۳} - \frac{و\,ع^{۳}\,ل^{۲}}{۲} + \frac{و\,ع^{۲}\,ل^{۲}}{۲}$$

$$= -\,و\,ع\,ل^{۲}\left(\frac{۱}{۳} + \frac{ع^{۲}}{۶} - \frac{ع}{۲}\right)$$

$$= \frac{-\,و\,ع\,ل^{۲}}{۶}\left(۲ - ۳ع + ع^{۲}\right)$$

$$= \frac{-\,و\,ع\,ل^{۲}}{۶}(۱-ع)(۲-ع) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$$

∴ مساوات (۳) یہ ہوجاتی ہے :-

$$آ\,ے\,ما = \frac{و(۱-ع)\,لا^{۳}}{۶} - \frac{و\,ع\,ل^{۲}\,لا}{۶}(۱-ع)(۲-ع) \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

فرض کرو کہ $ع > \frac{۱}{۲}$، تب اعظم انحراف آ اور ج کے درمیان واقع ہوگا۔ ما اعظم ہوگا جب کہ $\frac{فر\,ما}{فر\,لا} = ۰$

یعنی جب کہ $\frac{و(۱-ع)\,۳\,لا^{۲}}{۶} - \frac{و\,ع\,ل^{۲}}{۶}(۱-ع)(۲-ع) = ۰$

یا $لا^{۲} = \frac{ل^{۲}\,ع(۲-ع)}{۳}$

یا $لا = ل\sqrt{\frac{ع(۲-ع)}{۳}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۱)$

اس قیمت کو مساوات (۱۰) میں درج کرنے سے

$$آ\,ے\,صد = \frac{و\,ل^{۳}(۱-ع)}{۶}\cdot\left\{\frac{ع(۲-ع)}{۳}\right\}^{\frac{۳}{۲}} - \frac{و\,ع\,ل^{۲}\times ل}{۶}\left\{\frac{ع(۲-ع)}{۳}\right\}^{\frac{۱}{۲}}\times(۱-ع)(۲-ع)$$

$$= و\,ل^{۳}(۱-ع)\left\{\frac{ع(۲-ع)}{۳}\right\}^{\frac{۳}{۲}}\left(\frac{۱}{۶} - \frac{۳}{۶}\right)$$

$$= \frac{و\,ل^{۳}}{۳}\,(۱-ع)\left\{\frac{ع\,(۲-ع)}{۳}\right\}^{\frac{۳}{۲}}$$

$$\text{یا}\quad صہ = \frac{و\,ل^{۳}\,(۱-ع)}{۳\,آ\,ے}\left\{\frac{۲ع-ع^{۲}}{۳}\right\}^{\frac{۳}{۲}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

بوجھ کے نیچے انصراف مساوات (۱۰) میں لا = ع ل رکھنے سے حاصل ہوگا۔ اس طرح:۔

$$آ\,ے\,ا = \frac{و\,(۱-ع)\,ع^{۳}\,ل^{۳}}{۶} - \frac{و\,ع^{۲}\,ل^{۳}}{۶}\,(۱-ع)\,(۲-ع)$$

$$= \frac{و\,ع^{۲}\,ل^{۳}\,(۱-ع)}{۶}\left[ع-(۲-ع)\right]$$

$$\therefore\quad ا = \frac{و\,ع^{۲}\,ل^{۳}\,(۱-ع)^{۲}}{۳\,آ\,ے} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

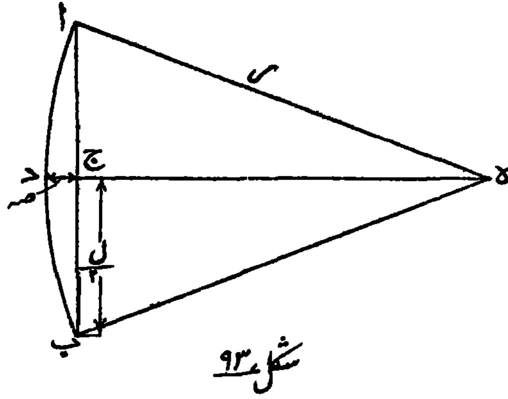
یکساں مضبوطی اور متوازی کوروں کے گرڈر کا انصراف۔

اگر گرڈر کے طول میں تراش اس طرح بدلے کہ زور مستقل ہو تو $\frac{م}{مق}$ مستقل ہوگا اور اگر گہرائی بھی مستقل ہو تو $\frac{م}{ے^{۲}}$ بھی مستقل ہوگا۔ اب اگر ے کو بھی مستقل مان لیا جائے تو

$$\frac{۱}{ر} = \frac{م}{آ\,ے} = \text{مستقل}$$

یعنی جہاں کہیں $\frac{م}{آ\,ے}$ مستقل ہو، شہتیر خم ہو کر دائرے کی ایک قوس بن جاتا ہے۔

فرض کرو کہ شکل ۹۳ ایک شہتیر کو تعبیر کرتی ہے جو خم ہو کر ایک دائرے کی قوس بن گیا ہے۔ (نوٹ۔ شکل کی آسانی کے لیے شہتیر کو افقی کی بجائے انتصابی وضع میں دکھایا گیا ہے۔)



شکل ۹۳

اب اگر دائرے کا مرکز ھ ہو اور شہتیر کا انصراف ج د ہو تو دائرے کے خواص سے

$$\text{ج د}\,(\text{ج ھ} + \text{ھ د}) = \text{ا ج}^{۲}$$

اس میں چونکہ ج د بہت چھوٹا ہے اس لیے یوں لکھا جاسکتا ہے:-

$$\text{صہ} \times \text{۲ر} = \left(\frac{\text{ل}}{۲}\right)^{۲} = \frac{\text{ل}^{۲}}{۴}$$

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{ل}^{۲}}{\text{۸ر}}$$

$$\text{لیکن} \quad \frac{۱}{\text{ر}} = \frac{\text{م}}{\text{آے}}$$

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{م ل}^{۲}}{\text{۸ آے}}$$

شہتیروں اور لداؤں کے مختلف اقسام کے انصرافوں کا ایک تختہ صفحہ ۲۷۲ پر دیا گیا ہے۔

خماؤ کی بازگشتگی — کسی شہتیر میں خماؤ کے ذریعے ایک خاص زور

پیدا کرنے میں جو کام صرف ہو وہ حسب ذیل طریقے پر معلوم کیا جا سکتا ہے :-
کسی جفت کا کام ایک زاویہ طے کرنے میں مساوی ہے جفت کا معیار ضرب طے کردہ زاویہ۔ اس لیے اگر ایک شہتیر کا ایک چھوٹا حصہ جس پر خماؤ کا معیار م عمل کر رہا ہو ڈھال فرعہ میں خم ہو جائے تو خماؤ کا کام $\frac{\text{م فرعہ}}{۲}$ ہوگا کیونکہ م بتدریج صفر سے قیمت م کو پہنچتا ہے۔

∴ پورے شہتیر کے خماؤ کا کام = ک = $\int \frac{\text{م فرعہ}}{۲}$

لیکن $\frac{\text{فرعہ}}{\text{فزلا}} = \frac{۱}{\text{ر}}$ یعنی $\frac{۱}{\text{ر}}$ = ڈھال کی تبدیلی کی شرح

∴ $\text{ک} = \int \frac{\text{م}}{۲\,\text{ر}}\ \text{فزلا}$

لیکن $\frac{۱}{\text{ر}} = \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}$

∴ $\text{ک} = \int \frac{\text{م}^۲}{۲\,\text{آ ے}}\ \text{فزلا}$

اگر خماؤ کا معیار مستقل ہو اور تراش مستطیلی ہو تو

$$\text{ک} = \frac{\text{م}^۲}{۲\,\text{آ ے}} \int^{\text{ل}} \text{فزلا} = \frac{\text{م}^۲\,\text{ل}}{۲\,\text{آ ے}}$$

لیکن $\text{م}^۲ = \frac{\text{ز}^۲\,\text{آ}^۲}{\text{ق}^۲}$

∴ $\text{ک} = \frac{\text{ز}^۲\,\text{آ ل}}{۲\,\text{ے ق}^۲}$

اب $\text{آ} = \frac{\text{ض گ}^۳}{۱۲}$ ، $\text{ق} = \frac{\text{گ}}{۲}$

$$\therefore \quad ک = \frac{ز^2}{ے} \times \frac{ل \times ۴ \times ض گ^3}{۲ \times ۱۲ \times گ^2}$$

$$= \frac{ز^2}{۶ ے} \times ح$$

جہاں ح شہتیر کا حجم ہے۔

$$\therefore \quad بازگشتگی = \frac{ک}{ح} = \frac{ز^2}{۶ ے}$$

اگر بوجھ منقسم ہو اور تراش مستطیلی ہو تو نصف شہتیر پر غور کرو۔

فرض کرو کہ لا پہل پایہ سے فاصلہ ہے۔

$$تب \quad م = \frac{و لا}{۲}$$

$$\therefore \quad \frac{ک}{۲} = \int_{0}^{\frac{ل}{۲}} \frac{م^2 فلا}{۲ آ ے}$$

$$= \int_{0}^{\frac{ل}{۲}} \frac{و^2 لا^2 فلا}{۸ آ ے}$$

$$= \frac{و^2 ل^3}{۱۹۲ آ ے}$$

$$ک = \frac{و^2 ل^3}{۹۶ آ ے} = \frac{۱}{۲} و \times ص$$

$$مرکز پر \quad م = \frac{و ل}{۴} = \frac{ز آ}{ق}$$

$$\therefore \quad ک = \frac{ز^2 آ^2 ل}{۶ آ ے ق^2}$$

$$= \frac{\text{ز}^2}{6\,\text{ے}} \times \frac{\text{آ ل}}{\text{ق}}$$

$$\text{حسب سابق آ} = \frac{\text{ض گ}^3}{12}\text{،}\quad \text{ق} = \frac{\text{گ}}{2}$$

$$\therefore \text{ک} = \frac{\text{ز}^2}{6\,\text{ے}} \times \frac{2\,\text{ض گ}^3\,\text{ل}}{12\,\text{گ}^2}$$

$$= \frac{\text{ز}^2}{18\,\text{ے}} \times \text{ح}$$

$$\therefore \text{بازگشتگی} = \frac{\text{ک}}{\text{ح}} = \frac{\text{ز}^2}{18\,\text{ے}}$$

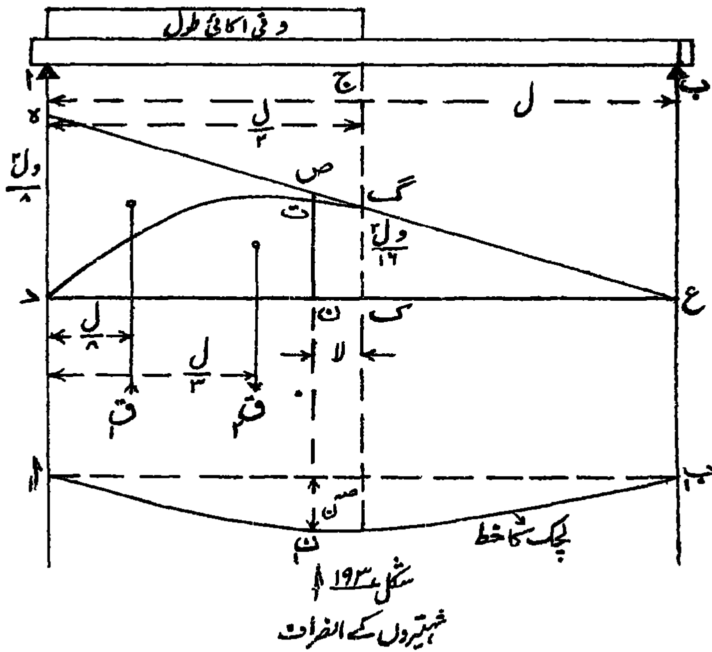
مور (Mohr) کے مسئلہ کی مزید مثالیں ـــــ اب ہم انصراف کی دریافت میں مور کے مسئلے کے استعمال کی چند مزید صورتیں پیش کرینگے۔ پہلی صورت میں معمولی طریقے سے ذرا انحراف کیا گیا ہے یعنی خیالی ردِّ عمل استعمال کیے گئے ہیں۔ یہ طریقہ اِس مسئلے کے تمام استعمالوں میں اختیار کیا جا سکتا ہے۔

(۱) ایسے شہتیر کا اعظم انصراف معلوم کرنا جس پر ایک سرے سے مرکز تک یکساں بوجھ ہو۔

اس لداؤ کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ منحنی د ت گ ع (شکل ۱۹۳) ہوگا جس میں حصہ د ت گ ایک مکافی ہے جس کو خط ع گ ایک مماس ہے۔

ہم کو پہلے یہ معلوم کرنا ہے کہ یہ اعظم انصراف کہاں واقع ہوگا۔ یہ اُس قاعدے کے ذریعے سے معلوم ہوگا کہ کسی شہتیر میں اعظم خماؤ کا معیار اُس مقام پر واقع ہوگا جہاں جز صفر ہو۔ اس لیے ہم نقشہ د گ ع کو بوجھ کا نقشہ سمجھینگے۔

اگر ع گ کو ہ تک خارج کیا جائے تو منحنی د ت گ ایک مکافی ہوگا



جو اس خط کو گ پر مس کریگا اور موجودہ مسئلے میں اس میں آسانی ہوگی کہ خماؤ کے معیار کے نقشے کو مثلث د ہ ع اور مکافی ٹکڑے د گ ہ کے فرق کی شکل میں لیا جائے۔

پہلا کام یہ ہے کہ ع پر کا خیالی ردِ عمل سع معلوم کیا جائے۔ اس کے لیے مثلث کے رقبے کو ایک قوت $ق_۲$ سمجھو جو اس کے مرکزِ جاذبہ میں سے عمل کرتی ہے جو د سے فاصلہ $\frac{ل}{۳}$ پر ہے۔

تب $ق_۲$ = مثلث د ہ ع کا رقبہ

$$= \frac{۱}{۲} \text{ د ہ} \times \text{د ع} = \frac{و\, ل^۳}{۱۶}$$

مکافی ٹکڑے کے رقبے کو ایک اُوپر وار قوت $ق_۱$ سمجھو جو اُس کے

مرکزِ جاذبہ میں سے عمل کرتی ہے، جو د سے فاصلہ $\frac{\text{ل}}{\text{۸}}$ پر ہوگا۔

$$\text{تب}\quad \text{ق}_{\text{۱}} = \text{رقبہ دف گ ھ} = \tfrac{\text{۱}}{\text{۳}}\ \text{ھ د} \times \text{دک}$$

$$= \frac{\text{و ل}^{\text{۲}}}{\text{۸} \times \text{۳}} \times \frac{\text{ل}}{\text{۲}} = \frac{\text{و ل}^{\text{۳}}}{\text{۴۸}}$$

ع پر کے خیالی ردِّ عمل $\text{ر}_{\text{ع}}$ کے لیے د کے گرد معیار لینے سے

$$\text{ق}_{\text{۲}} \times \frac{\text{ل}}{\text{۳}} - \text{ق}_{\text{۱}} \times \frac{\text{ل}}{\text{۸}} = \text{ر}_{\text{ع}} \times \text{ل}$$

$$\therefore \quad \text{ر}_{\text{ع}} = \frac{\text{ق}_{\text{۲}}}{\text{۳}} - \frac{\text{ق}_{\text{۱}}}{\text{۸}}$$

$$= \frac{\text{و ل}^{\text{۳}}}{\text{۴۸}} - \frac{\text{و ل}^{\text{۳}}}{\text{۴۸} \times \text{۸}} = \frac{\text{۷ و ل}^{\text{۳}}}{\text{۳۸۴}} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

فرض کرو کہ اعظم انصراف مرکز سے فاصلہ لا پر نقطہ ن پر واقع ہوتا ہے۔

تب اِس نقطے پر خیالی جزی قوت =

$$\text{ن پر جز} = \text{ر}_{\text{ع}} - \text{رقبہ ن ص ع} + \text{رقبہ ص ت گ}$$

$$= \frac{\text{۷ و ل}^{\text{۳}}}{\text{۳۸۴}} - \frac{\text{و ل}\left(\frac{\text{ل}}{\text{۲}} + \text{لا}\right)}{\text{۸}} \times \frac{\left(\frac{\text{ل}}{\text{۲}} + \text{لا}\right)}{\text{۲}} + \frac{\text{و لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}} \times \frac{\text{لا}}{\text{۳}}$$

$$= \frac{\text{۷ و ل}^{\text{۳}}}{\text{۳۸۴}} - \frac{\text{و ل}}{\text{۱۶}}\left(\frac{\text{ل}^{\text{۲}}}{\text{۴}} + \text{ل لا} + \text{لا}^{\text{۲}}\right) + \frac{\text{و لا}^{\text{۳}}}{\text{۶}}$$

$$= \frac{\text{۷ و ل}^{\text{۳}}}{\text{۳۸۴}} - \frac{\text{و ل}^{\text{۳}}}{\text{۶۴}} - \frac{\text{و ل}^{\text{۲}}\,\text{لا}}{\text{۱۶}} - \frac{\text{و ل لا}^{\text{۲}}}{\text{۱۶}} + \frac{\text{و لا}^{\text{۳}}}{\text{۶}}$$

$$= \frac{\text{و ل}^{\text{۳}}}{\text{۳۸۴}} + \frac{\text{و لا}^{\text{۳}}}{\text{۶}} - \frac{\text{و ل}^{\text{۲}}\,\text{لا}}{\text{۱۶}} - \frac{\text{و ل لا}^{\text{۲}}}{\text{۱۶}}$$

یہ اگر صفر ہو تو $\frac{\text{و}}{\text{۳۸۴}}$ سے تقسیم کر کے رقموں کو ترتیب دینے سے

$$۶۴\,لا^{۳} - ۲۴\,لا^{۲}\,ل - ۲۴\,لا\,ل^{۲} + ۱ = ۰$$

یا $$۶۴\left(\frac{لا}{ل}\right)^{۳} - ۲۴\left(\frac{لا}{ل}\right)^{۲} - ۲۴\left(\frac{لا}{ل}\right) + ۱ = ۰ \quad \ldots\ldots (۲)$$

یہ ایک کعبی مساوات ہے جس کو بالراست حل نہیں کیا جا سکتا۔

آزمایش کے ذریعے اس طرح حل کیا جائیگا:—

اگر لا = ۰ تو دائیں جانب جس کو ما کہا جائیگا = + ۱

اگر لا = ۱ء تو ما = ۰۶۴ء + ۲۴ء− ۲۴ء ۲+۱ = − ۱ء۵۷۶

اگر لا = ۰۵ء تو ما = ۰۰۸ء − ۰۶ء − ۲ء۱ + ۱ = − ۲۵۲ء

اگر لا = ۰۴ء تو ما = ۰۰۴۱ء − ۰۳۸ء − ۹۶ء + ۱ = + ۰۰۶ء

اگر ما کی قیمتیں لا کے بالمقابل ترسیم کی جائیں تو معلوم ہوگا کہ لا = تقریباً ۰۴۰۶ء کے لیے ما صفر ہوتا ہے، اور عملی اغراض کے لیے لا = ۰۴ء لے سکتے ہیں۔

اعظم انصراف کا نقطہ معلوم کر لینے کے بعد اس نقطے پر انصراف صحیح کی قیمت معلوم کرنا ہے۔

پہلے نقطہ ن پر خیالی خاؤ کا معیار $م_۱$ معلوم کرو۔

$م_۱ = \frac{س}{ع}\left(\frac{ل}{۲} + لا\right) +$ حصہ ص ن گ کا معیار۔ مثلث ص ن ع کا معیار

$$= \frac{و\,ل^{۳}}{۳۸۴} + ۵۴ء\,ل + \frac{و \times (۰۴ء\,ل)^{۲}}{۲} \times \frac{۰۴ء\,ل}{۳} \times \frac{۰۴ء\,ل}{۴}$$

$$= \frac{و\,ل}{۸} \times ۵۴ء\,ل \times \frac{۵۴ء\,ل}{۳} \times \frac{۵۴ء\,ل}{۲}$$

$$= و\,ل^{۳}\left\{۰۰۹۶۴ء + ۰۰۰۰۱ء - ۰۰۳۲۸ء\right\}$$

$$= ۰۰۶۳۷ء\; و\,ل^{۳}$$

$$\therefore \quad \text{ص}_{\text{ن}} = \frac{\text{م}_{۱}}{\text{آ ے}} = \frac{۰۰۶۳۷ء۰ \ \text{و ل}^{۴}}{\text{آ ے}} \quad .... \ (۳)$$

مقابلے کی دلچسپی کے لیے اس صورت پر غور کرو کہ یہی بوجھ پورے فصل پر منقسم ہوتا تو

$$\text{ص}_{\text{ن}} = \frac{۵}{۳۸۴} \cdot \frac{\text{و ل}^{۳}}{\text{آ ے}} \quad \text{(مشہور ضابطے سے)}$$

اس میں $\text{و} = \frac{\text{و ل}}{۲}$

$$\therefore \quad \text{ص}_{\text{ن}} = \frac{۵}{۷۶۸} \cdot \frac{\text{و ل}^{۴}}{\text{آ ے}} = \frac{۰۰۶۵۱ء۰ \ \text{و ل}^{۴}}{\text{آ ے}} \quad ...... \ (۴)$$

اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر انصراف کے اغراض کے لیے موجودہ صورت کو وہ صورت خیال کیا جائے کہ یہی بوجھ پورے فصل پر منقسم ہو تو بہت ہی خفیف غلطی واقع ہوگی جو اس امر کے مدِ نظر قابلِ نظر انداز ہوگی کہ عملی حالات نظری حالات سے کس قدر مختلف ہوتے ہیں۔ لیکن یہ یاد رہے کہ اعظم انصراف مرکز پر نہیں بلکہ خالی سرے سے ۵۴ء ل کے فاصلے پر واقع ہوگا۔

(۲) ایسے یکساں لدے ہوئے شہتیر کا اعظم انصراف معلوم کرنا جو ایک سرے پر ثابت اور دوسرے پر سہارا ہوا ہو۔

اِس صورت کے لیے خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ۹۳ ب کے مطابق ہوگا۔ منحنی ب د ج ایک مکافی ہے جس کا ارتفاع $\frac{\text{و ل}^{۲}}{۲}$ ہے جہاں و بوجھ فی اکائی طول شہتیر ہے اور یہ منحنی برآمدہ بیرم پر یکساں بوجھ سے پیدا ہونے والے خماؤ کے معیار کا نقشہ ہے اور ب س ایک خطِ مستقیم ہے جس میں ا س $= \frac{۳ \ \text{و ل}^{۲}}{۸}$، اور یہ ب پر کے ردِّ عمل $\frac{۳ \ \text{و ل}}{۸}$ سے پیدا ہونے والے خماؤ کے معیار کا نقشہ ہے۔

ہمارا پہلا کام یہ ہے کہ وہ نقطہ ن معلوم کریں جس پر انصراف اعظم ہوتا ہے۔

شکل ۹۳ ب۔ شہتیروں کے انصراف

خیالی طناب کے محل ا ن پر غور کرو۔ اس پر عمل کرنے والی قوتیں یہ ہیں:۔ ن پر ایک افقی تناؤ آ ہے اور ا پر ایک مساوی افقی تناؤ کیونکہ شہتیر ثابت سرے ا پر افقی ہے اور ایک انتصابی قوت رقبہ ج س د کے مساوی اوپر وار کیونکہ یہ رقبہ منفی ہے اور ایک انتصابی قوت رقبہ د ف گ کے مساوی نیچے کو کیونکہ یہ رقبہ مثبت ہے۔

اگر یہ قوتیں تعادل میں ہیں تو چونکہ افقی قوتیں مساوی اور مخالف ہیں اس لیے انتصابی قوتیں بھی مساوی اور مخالف ہونگی۔ اس طرح ذیل کا قاعدہ حاصل ہوتا ہے:۔

اعظم انصراف اُس نقطے پر واقع ہوگا جہاں رقبہ د ف گ رقبہ د س ج کے مساوی ہو۔

یہ کہنا بالکل اس کے مترادف ہوا کہ رقبہ ا ہ گ س رقبہ ا ہ ف ج کے مساوی ہو۔

اب، اگر ہ ب = لا اور ا ب = ل تو

$$\frac{ہگ}{لا} = \frac{اس}{ل}$$

یعنی $ہگ = \frac{لا \times اس}{ل}$

رقبہ $اہگس = \frac{اہ}{۲}(اس + گہ)$

$$= \frac{ل-لا}{۲} \times اس\left(۱ + \frac{لا}{ل}\right)$$

$$= \frac{(ل-لا)}{۲} \times \frac{(ل+لا)}{ل} \times \frac{۳ و ل^۲}{۸}$$

$$= \frac{۳ و}{۱۶}(ل^۲ - لا^۲)$$ ....(۱)

نیز رقبہ اہفج = رقبہ ابدج - رقبہ ہفب

$$= \frac{۱}{۳} اج \times اب - \frac{۱}{۳} فہ \times ہب$$

$$= \frac{۱}{۳}\cdot\frac{و ل^۳}{۲} - \frac{۱}{۳}\cdot\frac{و لا^۳}{۲}$$ ....(۲)

اگر (۱) = (۲) تو

$$\frac{۳ و ل}{۱۶}(ل^۲ - لا^۲) = \frac{و}{۶}(ل^۳ - لا^۳)$$

اجزائے ضربی لینے سے

یا $\frac{۳ و ل}{۱۶}(ل+لا)(ل-لا) = \frac{و}{۶}(ل-لا)(ل^۲ + ل لا + لا^۲)$

$\frac{و}{۲}(ل-لا)$ سے تقسیم کرنے سے اور ضرب چلیپائی سے

$$۹ ل^۲ + ۹ ل لا = ۸ ل^۲ + ۸ ل لا + ۸ لا^۲$$

یا $۸ لا^۲ - ل لا - ل^۲ = ۰$ ....(۳)

اِس مساوات درجۂ دوم کا عام حل یہ ہوگا:-

$$لا = \frac{ل \pm \sqrt{ل^{۲} + ۳۲ ل^{۲}}}{۱۶}$$

$$= \frac{ل(۱ \pm \sqrt{۳۳})}{۱۶}$$

منفی قیمت ناقابلِ قبول ہے۔

$$\therefore لا = \frac{ل(۱ + \sqrt{۳۳})}{۱۶} = ۰٫۴۲۲ ل$$ تقریباً

یعنی اعظم انصراف سادہ سہارے کے سرے سے ۴۲۲ء ل کے فاصلہ پر واقع ہوتا ہے۔

اب ہم اعظم انصراف صن خیالی طناب کے حصہ ن ب کے تناول پر غور کرنے سے معلوم کرینگے۔ اس پر عمل کرنے والی قوتیں یہ ہیں:- ب پر ایک تناؤن پر افقی تناؤ آسے اور خاؤ کے معیار کے نقشے ب ف گ کا رقبہ۔
نقطہ ب کے گرد معیار لینے سے اس پر کا تناؤ شامل نہیں ہوگا اور آسے × صن = ب کے گرد رقبہ ب ف گ کا معیار حاصل ہوگا۔
لیکن یہ رقبہ مثلث ب ہ گ اور مکافی ب ہ ف کا فرق ہے۔

$$△ \text{ کا رقبہ } = \frac{۱}{۲} گ ہ \times ب ہ = \frac{۱}{۲} \times \frac{لا}{ل} \times اس \times لا$$

$$= \frac{۱}{۲} \cdot \frac{لا^{۲}}{ل} \times \frac{۳ و ل^{۲}}{۸} = \frac{۳ و لا^{۲} ل}{۱۶}$$

△ کا مرکزِ ہندسی ب سے افقی فاصلہ $\frac{۲لا}{۳}$ پر ہوگا۔

$$\therefore △ \text{ کا معیار ب کے گرد } = \frac{۳ و لا^{۲} ل}{۱۶} \times \frac{۲لا}{۳} = \frac{و لا^{۳} ل}{۸}$$

مکافی کا رقبہ = $\frac{۲}{۳}$ ف ہ × ب ہ

$= \frac{۲}{۳} \times \frac{و لا^۲}{۲} \times لا = \frac{و لا^۳}{۳}$

اِس کا مرکزِ ہندسی ب سے فاصلہ $\frac{۳ لا}{۴}$ پر ہوگا

∴ مکافی کا معیار ب۱ کے گرد $= \frac{و لا^۳}{۳} \times \frac{۳ لا}{۴}$

$= \frac{و لا^۴}{۴}$

∴ ب۱ کے گرد رقبہ ب ف گ کا معیار

$= \frac{و لا^۳ ل}{۴} - \frac{و لا^۴}{۴}$

$= \frac{و لا^۳}{۴} (ل - لا)$

∴ $آ ے \times ص_ن = \frac{و لا^۳}{۴} (ل - لا)$

لا = ۴۲۲ء ل رکھنے سے

$آ ے \times ص_ن = \frac{و \times (۴۲۲ء ل)^۳ \times ۵۷۸ء ل}{۴}$

$= ۰۰۵۴۳ء و ل^۴$

∴ $ص_ن = \frac{۰۰۵۴۳ء و ل^۴}{آ ے}$

و ل = مجموعی بوجھ = و رکھنے سے

$ص_ن = \frac{۰۰۵۴۳ء و ل^۳}{آ ے}$

$= \frac{و ل^۳}{۱۸۴ آ ے}$

یکساں لدے ہوئے اور دونوں سروں پر سادہ سہارے کے شہتیر کے لیے

$صن = \frac{۵\,و\,ل^{۳}}{۳۸۴\,آ\,ے}$ اور یکساں لدے ہوئے اور دونوں سروں پر ثابت شہتیر کے لیے

$صن = \frac{و\,ل^{۳}}{۳۸۴\,آ\,ے}$ اِس طرح دیکھو زیر غور صورت میں انصراف ان دونوں قیمتوں کے درمیان ہے اور ظاہر ہے کہ یہی ہونا چاہیے۔

یہی طریقہ اُس صورت کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے کہ ایک شہتیر پر جو زیر غور شہتیر کی طرح ثابت ہے ایک منفرد مرکزی بوجھ ف ہو۔ اِس صورت میں اعظم انصراف $= \frac{ف\,ل^{۳}}{۴۸\sqrt{۵}\,آ\,ے}$ اور سادہ سہارے ہوئے سرے سے $\frac{ل}{\sqrt{۵}}$ کے فاصلے پر واقع ہوتا ہے۔

انصراف وغیرہ کی عددی مثالیں

(۱) ایک گرڈر کا فصل ۱۲۰ فٹ ہے، اور اس کو $۱\frac{۱}{۲}$ ٹن فی طولی فٹ کا یکساں بوجھ سہارتا ہے۔ مرکز پر گرڈر کی گہرائی کیا ہونی چاہیے کہ اعظم انصراف فصل کے $\frac{۱}{۱۲۰۰}$ سے زیادہ نہ ہو؟ کوروں میں اعظم زور $۶\frac{۱}{۲}$ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ نہیں ہونا چاہیے اور ے کی قیمت ۱۲۰۰۰ ٹن فی مربع انچ ہے (بی۔ ایس سی۔ لندن ۱۹۰۷ء)۔

سوال صاف نہیں کیونکہ اگر گہرائی سارے طول میں یکساں نہیں تو جب تک اِس کی تبدیلی کا طور نہ معلوم ہو انصراف محسوب نہیں ہو سکتا۔

ہم گہرائی کو مستقل مان لینگے:

$$مرکز\ پر\ مر = \frac{و\,ل}{۸} = \frac{۱۲۰ \times ۱۲۰ \times ۱\frac{۱}{۲}}{۸}\ \text{فٹ ٹن}$$

$$= ۲۷۰۰۰\ \text{انچ ٹن}$$

∴ اگر اعظم زور = $٦\frac{١}{٢}$ ٹن فی مربع انچ

تو چونکہ $\text{ز} = \frac{\text{م}}{\text{مق}}$

∴ $\text{مق} = \frac{\text{م}}{\text{ز}} = \frac{٢٧٠٠٠}{٦\frac{١}{٢}}$ انچ اکائیاں

اب $\text{صہ} = \frac{٥\ \text{و}\ \text{ل}^{٣}}{٣٨٤\ \text{آ}\ \text{ے}}$

اور $\text{صہ} = \frac{\text{ل}}{١٢٠٠} = \frac{١}{١٠}$ فٹ

∴ $\frac{١٢}{١٠} = ١٧٢٨ \times \frac{١٢٠ \times ١٢٠ \times ١٢٠ \times ١٥٠ \times ٥}{\text{آ} \times ١٢٠٠٠ \times ٣٨٤}$

∴ $\text{آ} = ٤٠٥٠٠٠$ انچ اکائیاں

لیکن $\frac{\text{آ}}{\text{مق}} = \frac{\text{گ}}{٢}$ جہاں گ = گہرائی

∴ $\text{گ} = \frac{٢\ \text{آ}}{\text{مق}} = \frac{٦٫٥ \times ٤٠٥٠٠٠ \times ٢}{٢٧٠٠٠}$ انچ

$= \frac{٦٫٥ \times ٣٠}{١٢} = ١٦٫٢٥$ فٹ

عملاً ٹھوس پیٹے کے گرڈر میں اتنی بڑی گہرائی نہیں اختیار کی جاتی۔

(۲) ایک ڈھلے لوہے کا پانی کا نل جس کا بیرونی قطر ۱۰ انچ اور موٹائی $\frac{١}{٢}$ انچ ہے دو سہاروں پر ٹکا ہوا ہے جن کا باہمی فاصلہ ۴۰ فٹ ہے۔ نل کے خالی اور بھرے ہونے کی صورت میں نل میں اعظم زور اور انصراف معلوم کرو (اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای فروری سنہ ۱۹۰۶ء)۔

اس صورت میں $\text{آ} = \frac{\pi(\text{ق}^{۴} - \text{ق}_{۱}^{۴})}{۶۴} = \frac{\pi(۱۰^{۴} - ۹^{۴})}{۶۴}$

$= ۱۶۸٫۸$ انچ اکائیاں

$\therefore$ $\text{مق} = \frac{\text{آ}}{\frac{\text{ق}}{۲}} = \frac{۱۶۸٫۸}{۵} = ۳۳٫۷۶$ انچ اکائیاں

نل کا حجم $= \frac{\pi}{۴}(۱۰۰ - ۸۱) \times \frac{۴۰}{۱۴۴} = ۴٫۱۴$ مکعب فٹ

پانی کا حجم $= \frac{\pi}{۴} \cdot \frac{۸۱}{۱۴۴} \times ۴۰ = ۱۷٫۶۷$ مکعب فٹ

$\therefore$ نل کا وزن $= \text{و} = \frac{۴۵۰ \times ۴٫۱۴}{۲۲۴۰} = ٫۸۳۲$ ٹن

پانی کا وزن $= \text{و}_{۱} = \frac{۶۲٫۵ \times ۱۷٫۶۷}{۲۲۴۰} = ٫۴۹۲$ ٹن

$\therefore$ $\text{و} = \text{و} + \text{و}_{۱} = ۱٫۳۲۴$ ٹن (تقریباً)

$\therefore$ خالی کی صورت میں اعظم زور $= \frac{\text{م}}{\text{مق}} = \frac{۱۲ \times ۴۰ \times ٫۸۳۲}{۳۳٫۷۶ \times ۸}$

$= ۱٫۴۸$ ٹن فی مربع انچ

بھرے ہونے کی صورت میں اعظم زور $= \frac{۱٫۳۲۴ \times ۱٫۴۸}{٫۸۳۲} = ۲٫۳۵$ ٹن فی مربع انچ

ے = ۸۰۰۰ ٹن فی مربع انچ لینے سے

خالی کی صورت میں $\text{صہ} = \frac{۵\,\text{و}\,\text{ل}^{۳}}{۳۸۴\,\text{ے}\,\text{آ}}$

$= \frac{۱۲ \times ۱۲ \times ۱۲ \times ۴۰ \times ۴۰ \times ۴۰ \times ٫۸۳۲ \times ۵}{۸۰۰۰ \times ۱۶۸٫۸ \times ۳۸۴}$

$= ٫۰۹$ انچ

بھرے ہونے کی صورت میں $ص = \frac{۱٫۳۲۴ \times ۰٫۸۹}{۰٫۸۳۲} = ۱٫۴۱$ انچ

(۳) ایک ڈنڈا جو نرم فولاد کے نل کا بنا ہوا ہے اور جس کا قطر ۶ انچ اور موٹائی $\frac{۱}{۲}$ ۱ انچ ہے زمین میں مضبوط گڑا ہوا ہے، اور اس کی چوٹی زمین سے ۱۰ فٹ اونچی ہے۔ ۲۰۰۰ پونڈ کی ایک افقی کھینچ زمین سے ۶ فٹ کے فاصلہ پر لگائی جاتی ہے۔ چوٹی پر انحراف معلوم کرو۔ ے = ۱۳۵۰۰ ٹن فی مربع انچ۔ (بی۔ ایس سی۔ لندن ۱۹۰۳ء)۔

اس صورت میں $آ = \frac{\pi (ق^۴ - ق_۱^۴)}{۶۴} = \frac{\pi (۶^۴ - ۵^۴)}{۶۴}$

$= ۳۲٫۹$ انچ اکائیاں

یہ مثال بالکل صورت (۲) کی ہے

$\therefore \quad ص = \frac{و\, ل_۱^۲}{۲\, آ\, ے} \left(ل - \frac{ل_۱}{۳}\right)$

موجودہ صورت میں ل = ۶ فٹ، ل = ۱۰ فٹ

$و = ۲۰۰۰$ پونڈ $= \frac{۲۰۰۰}{۲۲۴۰}$ ٹن

$\therefore \quad ص = \frac{۲۰۰۰}{۲۲۴۰} \times \frac{۱۲ \times ۸ \times ۱۲ \times ۱۲ \times ۶ \times ۶}{۲ \times ۳۲٫۹ \times ۱۳۵۰۰}$

$= ۰٫۵$ انچ تقریباً

(۴) ایک فولادی سلاخ ۴ انچ چوڑی اور $\frac{۳}{۸}$ انچ موٹی ہے۔ اس کو کس اندرونی نصف قطر کی حد تک موڑا جا سکتا ہے بغیر اس کے کہ اعظم زورہ ٹن فی مربع انچ سے زیادہ ہو۔ ے = ۱۳۰۰۰ ٹن فی مربع انچ۔ (اے۔ ایم۔ آئی۔ سی۔ ای ۱۹۰۶ء)۔

خماؤ کا عام ضابطہ یہ ہے :۔

$$\frac{ز}{ق} = \frac{ھ}{آ} = \frac{ے}{ر}$$

$$\therefore \quad \frac{ز}{ق} = \frac{ے}{ر}$$

$$\text{یا} \quad ر = \frac{ق ے}{ز}$$

موجودہ صورت میں ق = تعدیلی محور سے انتہائی ریشے کا فاصلہ

$$= \frac{3}{16} \text{ انچ}$$

$$\therefore \quad ر = \frac{3}{16} \times \frac{13000}{5}$$

$$= 488 \text{ انچ}$$

$$= 40.67 \text{ فٹ}$$

دیکھو اس سوال میں سلاخ کی چوڑائی کی ضرورت نہیں۔
جواب جو حاصل ہوا ہے وہ مرکزی خط کا نصف قطر ہے۔

(۵) ایک ڈھلے لوہے کے شہتیر کی تراش مستطیلی ہے۔ موٹائی ۱۱ انچ اور گہرائی ۲ انچ ہے۔ یہ معلوم ہوا ہے کہ اگر ۳۶ انچ کے فصل کے وسط میں ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ کا بوجھ رکھا جائے تو اس سے ۱۱ء انچ کا انصراف پیدا ہوتا ہے۔ ۳۰ء انچ کا انصراف پیدا کرنے کے لیے ½ ہنڈرڈ ویٹ کے بوجھ کو اسی فصل کے وسط میں کتنی بلندی سے گرانا ہوگا۔ (بی۔ ایس سی۔ لندن ۱۹۰۷ء)

۱۱ء انچ انصراف پیدا کرنے کے لیے ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ کی ضرورت ہوتی ہے۔

∴ ۳۰ء انچ انصراف پیدا کرنے کے لیے $\frac{۳۰ء \times ۱۰}{۱۱ء}$ ہنڈرڈ ویٹ کی ضرورت ہوگی۔

مرکز پر لدی ہوئی سلاخ کے انصراف میں کام = $\frac{1}{2}$ و صہ

∴ ۳۰ء انچ انصراف میں کام = $\frac{1}{2} \times \frac{۳۰ء \times ۱۰}{۱۱ء} \times$ ۳۰ء انچ ہنڈرڈ ویٹ

= ۳۴۱ء فٹ ہنڈرڈ ویٹ

اگر $\frac{1}{2}$ ہنڈرڈ ویٹ کو بلندی ھ سے گرانا پڑے تو اس کا کیا ہوا کام = $\frac{1}{2}\left(ھ + \frac{۳۰ء}{۱۲}\right)$ فٹ ہنڈرڈ ویٹ کیونکہ بلندی ھ شہتیر کے اصلی غیر منصرف محل سے ہے۔

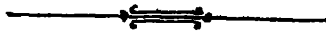
کام کی یہ دونوں مقداریں مساوی ہونی چاہییں

∴ $\frac{1}{2}\left(ھ + \frac{۳۰ء}{۱۲}\right) =$ ۳۴۱ء

ھ = ۶۸۲ء $- \frac{۳۰ء}{۱۲}$ فٹ

= ۸ء۱۸ − ۳۰ء انچ

= ۷ء۸۸ انچ



نواں باب

ثابت اور مسلسل شہتیر



اگر کسی شہتیر کے سرے ایک خاص سمت میں اِس طرح ثابت کیے گئے ہوں کہ اُن میں وہ میلان نہ پیدا ہو سکے جو آزاد خماؤ سے پیدا ہوتا یا اگر کوئی شہتیر دو سے زیادہ سہاروں پر ٹکا ہوا ہو تو خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے سادہ سہارے ہوئے شہتیروں سے جن سے ہم نے اب تک بحث کی ہے مختلف ہونگے۔

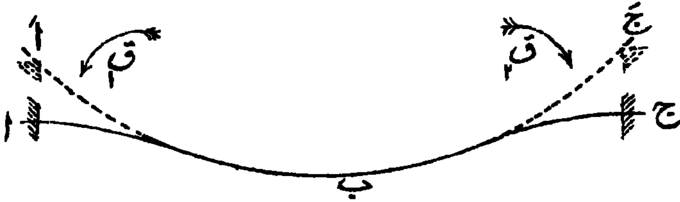
اول الذکر صورت میں شہتیر کو ثابت یا دربستہ یا نصب شدہ کہا جاتا ہے، اور دوسری صورت میں اس کو مسلسل شہتیر کہا جاتا ہے۔

ہم اب اس سے بحث کرینگے کہ ایسے شہتیروں کے لیے جز اور خماؤ کے معیار کے نقشے کس طرح معلوم کیے جا سکتے ہیں اور سادہ سہارے ہوئے شہتیروں کے مقابلے میں ان کے فوائد اور نقصانات دکھائینگے۔

ثابت شہتیر

اگر ایک شہتیر کے سرے افقی سمت میں ثابت ہوں تو شہتیر خمیدگی کے بعد ا ب ج جیسی وضع اختیار کریگا (شکل ۹۴ء)۔ اگر سرے آزاد ہوتے تو

یہ نقطہ دار وضع اَ ب جَ اختیار کرنا، اور اس کو وضع ا ب ج میں لانے کے لیے



شکل ۹۴۔ ثابت شہتیر

منفی خماؤ کے معیار لگانے پڑتے جن کو نقشے کے ذریعے دکھایا گیا ہے کہ قوتوں قا، ق سے پیدا ہوتے ہیں۔ اِس طرح شہتیر کے سروں پر منفی خماؤ کے معیار عمل کرینگے کیونکہ ان سے جو انحنا پیدا ہوتا ہے وہ بوجھ سے پیدا ہونے والے انحنا کی مخالف سمت میں ہے۔ خماؤ کے معیار کی اس علامت کی تبدیلی کا مطلب یہ ہے کہ شہتیر کے تنشی اور فشاری پہلو مقلوب ہو جائینگے۔ ہم ثابت شہتیروں کے مسائل سے ترسیمی اور ریاضیاتی دونوں طرح سے بحث کرینگے جیسا کہ شہتیروں کے انصراف کی صورت میں کیا گیا تھا۔

ترسیمی بحث

مور (Mohr) کے مسئلے کی رُو سے کسی شہتیر کی منصرف وضع وہی ہوگی جو اسی کے فصل کی ایک خیالی طناب کی ہوتی جس پر لداؤ شہتیر کے خماؤ کے معیار کے منحنی کے مطابق ہو اور جس میں افقی تناؤ خماؤ کی استواری ($\bar{ا} \times م$) کے مساوی ہو۔ اگر ایک شہتیر کے سرے افقی سمت میں ثابت ہوں تو لچک کے خط کو تعبیر کرنے والے رسیاتی کثیر الاضلاع کا پہلا اور آخری ضلع متوازی ہوسکے۔ اس کے معنے یہ ہونگے کہ سمتی خط پر جو خماؤ کے معیار کے منحنی کے رقبوں کے حصے تعبیر کیے گئے اُس پر پہلا اور آخری نقطہ ایک دوسرے پر منطبق ہوں اور اس کے معنے

نہ ہونگے کہ خماؤ کے معیار کے منحنی کا مجموعی رقبہ صفر ہوگا۔ اس کی مدد سے ہم ذیل کا قاعدہ قائم کر سکتے ہیں:۔

اگر ایک شہتیر کے سرے افقی سمت میں ایک ہی لیول پر ثابت ہوں، اور شہتیر کی تراش سارے طول میں مستقل ہو تو منفی خماؤ کے معیار پیدا ہونگے اور منفی خماؤ کے معیار کے نقشے کا رقبہ اُس کے مساوی ہوگا جو اس بوجھ سے آزاد سہارے ہوئے شہتیر کی صورت میں ہوتا۔

ہم منفی خماؤ کے معیار کے نقشے کو "سروں کا نقشہ" اور آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے نقشے کو "آزاد نقشہ" کہینگے۔

اب مسئلہ دو صورتوں میں بٹ جاتا ہے: (ا) جس میں لداؤ متشاکل ہو (ب) جس میں لداؤ بے قاعدہ یا غیر متشاکل ہو۔

متشاکل لداؤ ——— اگر لداؤ متشاکل ہو تو شہتیر دونوں طرف سے ایک جیسا ہوگا اور اس طرح سروں کے خماؤ کے معیار مساوی ہونگے، اور ان کی قیمت اس طرح حاصل ہوسکیگی کہ آزاد نقشے کے رقبے کو فصل سے تقسیم کریں۔ ذیل کی صورتوں پر غور کرنے سے یہ زیادہ واضح ہوجائیگا۔

(ا) ثابت شہتیر پر یکساں بوجھ ——— فرض کرو کہ طول ل کے شہتیر ا ب (شکل ۹۵) پر شدت ب کا ایک یکساں بوجھ چھایا ہوا ہے۔ آزاد نقشہ اس صورت میں مکافی ا ج ب ہوگا جس کا اعظم معین $\frac{\text{ب ل}^2}{8}$ ہوگا۔ اور چونکہ مکافی کا رقبہ حائط مستطیل کا دو تہائی ہوتا ہے اِس لیے

$$\text{آزاد نقشے کا رقبہ} = \frac{2}{3}\,\text{ل} \times \frac{\text{ب ل}^2}{8} = \frac{\text{ب ل}^3}{12}$$

$$\therefore \text{سروں کے خماؤ کا معیار} = \frac{\text{ب ل}^3}{12} \div \text{ل} = \frac{\text{ب ل}^2}{12}$$

اس لیے اگر ا ع اور ب ف = $\frac{ب ل^2}{12}$ قایم کیے جائیں تو ع ف کو ملانے سے سروں کا نقشہ حاصل ہوگا اور حاصل نقشہ اس کا اور مکانی کا فرق ہوگا جو کہ سایہ دار دکھایا گیا ہے۔ نقاط گ اور ہ پر خماؤ کا معیار صفر ہے اور یہ نقاط نقاطِ انعطاف کہلاتے ہیں کیونکہ ان نقاط پر لچک کے خط کا انحنا علامت بدلتا ہے۔

شکل ۹۵۔ ثابت شہتیر پر یکساں بوجھ

فرض کرو کہ نقطہ گ شہتیر کے مرکز سے فاصلہ لا پر ہے، تب چونکہ مکانی کا معین اس نقطے پر $\frac{ب ل^2}{12}$ ہے اس لیے

$$\frac{ب}{2}\left(\frac{ل^2}{4} - لا^2\right) = \frac{ب ل^2}{12}$$

contraflexure ۵

یا $$\frac{\text{ب}\,\text{لا}^{2}}{2} = \frac{\text{ب}\,\text{ل}^{2}}{24}$$

یا $$\text{لا}^{2} = \frac{\text{ل}^{2}}{12}$$

یا $$\text{لا} = \frac{\text{ل}}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{گ کا فاصلہ ع سے} = \frac{\text{ل}}{2} - \text{لا} = \frac{\text{ل}}{2} - \frac{\text{ل}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\text{ل}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{ل}}{6}\left(3-\sqrt{3}\right)$$

$$= 0.211\,\text{ل}$$

جز کا نقشہ ——— تشاکل لداؤ کی صورت میں جز کا نقشہ بالکل سادہ سہارے ہوئے شہتیر کی طرح ہوگا کیونکہ کسی نقطے پر جز اس نقطے پر خماؤ کے معیار کے منحنی کے ڈھال کے مساوی ہوتا ہے اور تشاکل لداؤ کی صورت میں ثابت شہتیر کے خماؤ کے معیار کے نقشے میں صرف یہ ہوتا ہے کہ اساسی خط انتصاباً اوپر کو اٹھ جاتا ہے ڈھال میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

انصراف ——— مرکز پر کا انصراف حسب سابق اس طرح معلوم ہوسکتا ہے کہ خیالی رسی ا ب کے توازن پر غور کریں۔

بائیں نصف رسی کے توازن پر غور کرنے سے اور ا_1 کے گرد معیار لینے سے

$$\text{آ ے} \times \text{ص} = \text{ب}\,\text{م}_1 - \text{ب}\,\text{م}_2$$

$$= \text{ب}\left(\text{م}_1 - \text{م}_2\right)$$

موجودہ صورت میں ب = آزاد نقشے کے نصف کا رقبہ

$$= \frac{2}{3} \times \frac{\text{ل}}{2} \times \frac{\text{ب}\,\text{ل}^{2}}{8} = \frac{\text{ب}\,\text{ل}^{3}}{24}$$

$$\text{م}_1 = \frac{\text{۵ ل}}{\text{۱۶}}$$

$$\text{م}_2 = \frac{\text{ل}}{\text{۴}}$$

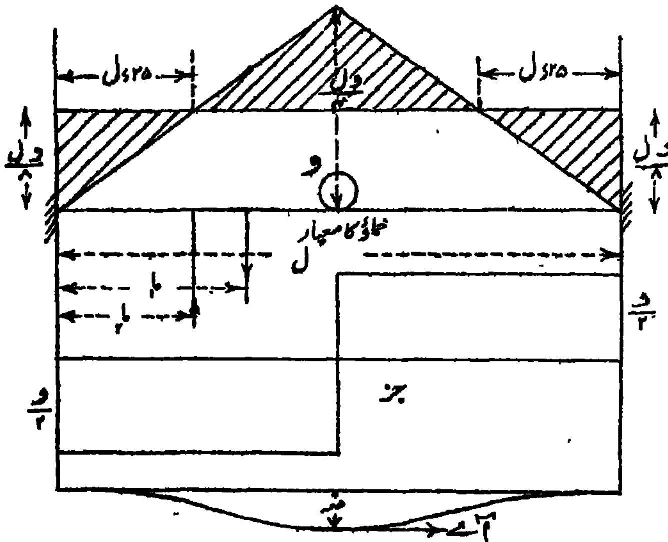
$$\therefore \quad \text{آ ے} \times \text{ص} = \frac{\text{ب ل}^{\text{۳}}}{\text{۲۴}} \left(\frac{\text{۵ ل}}{\text{۱۶}} - \frac{\text{ل}}{\text{۴}} \right) = \frac{\text{ب ل}^{\text{۴}}}{\text{۳۸۴}}$$

$$\therefore \quad \text{ص} = \frac{\text{ب ل}^{\text{۴}}}{\text{۳۸۴ آ ے}} = \frac{\text{و ل}^{\text{۳}}}{\text{۳۸۴ آ ے}}$$

دیکھو یہ اسی لداؤ کے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے انصراف کا پانچواں حصہ ہے۔

(۲) ثابت شہتیر پر منفرد مرکزی بوجھ ——— اس صورت میں آزاد نقشے کا رقبہ $= \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\, \text{ل} \times \frac{\text{و ل}}{\text{۴}} = \frac{\text{و ل}^{\text{۲}}}{\text{۸}}$

$$\therefore \quad \text{سروں کے خماؤ کا معیار} = \frac{\text{و ل}^{\text{۲}}}{\text{۸}} \div \text{ل} = \frac{\text{و ل}}{\text{۸}}$$



شکل ۹۶۔ ثابت شہتیر پر مرکزی بوجھ

خماؤ کے معیار اور جزء کے نقشے شکل ع۹۶ میں دکھائے گئے ہیں۔ نقاطِ انعطاف[ف] فصل کے $\frac{1}{4}$ اور $\frac{3}{4}$ پر ہیں۔

انصراف ——— گزشتہ صورت کی طرح

$$\text{آ سے} \times \text{صہ} = \text{ب}\,(\text{ما}_1 - \text{ما}_2)$$

موجودہ صورت میں $\text{ب} = \frac{\text{و ل}}{8} \times \frac{\text{ل}}{2} = \frac{\text{و ل}^2}{16}$

$$\text{ما}_1 = \frac{\text{ل}}{3}$$

$$\text{ما}_2 = \frac{\text{ل}}{4}$$

$$\therefore \quad \text{آ سے} \times \text{صہ} = \frac{\text{و ل}^2}{16}\left(\frac{\text{ل}}{3} - \frac{\text{ل}}{4}\right) = \frac{\text{و ل}^3}{192}$$

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{و ل}^3}{192\ \text{آ سے}}$$

یہ اُسی لداؤ کے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے انصراف کا چوتھائی حصہ ہے۔

غیر متشاکل لداؤ ——— اِس صورت میں سروں کے معیار مساوی نہیں ہونگے اور اس شرط کے علاوہ کہ سروں کے نقشے اور آزاد نقشے کے رقبے مساوی ہوں اِس صورت میں یہ شرط بھی ہے کہ ان رقبوں کے ہندسی مرکز ایک ہی انتصابی خط میں واقع ہونے چاہییں۔

اِس کا ثبوت حسبِ ذیل ہے:- خیالی رسی پر غور کریں اور ایک سرے کے گرد معیار لیں تو چونکہ دوسرے سرے پر کا تناؤ بھی اس نقطے میں سے گزرتا ہے اس لیے اس کا معیار صفر ہوگا، اور اس طرح اس نقطے کے گرد خماؤ کے معیار کے نقشوں کا معیار صفر ہوگا۔ لیکن چونکہ ان نقشوں کے رقبے مساوی ہیں اِس لیے

contraflexure — ف

ان کے مرکزِ ہندسی اس نقطے سے مساوی فاصلے پر ہونے چاہییں۔

فرض کرو کہ ایک فصل ا ب (شکل ۹۷) پر جس کا طول ل ہے بوجھ کا کوئی بے قاعدہ نظام ہے جس سے خماؤ کے معیار کا آزاد نقشہ ا ج د ب پیدا ہوتا ہے اور فرض کرو کہ اِس نقشے کا مرکزِ ہندسی انتصابی خط گ گ پر واقع ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ سروں کے خماؤ کے معیار $م_ا$ اور $م_ب$ ہیں، اور ا ا اور ب ب ان کے مساوی قایم کیے گئے ہیں۔ تب منحرف ا ا ب ب سرے کا نقشہ ہوگا، اور اب جو شرطیں پوری ہونی ہیں وہ یہ ہیں کہ منحرف کا رقبہ منحنی ا ج د ب کے رقبے کے مساوی ہو اور یہ کہ اس کا مرکزِ ہندسی خط گ گ پر واقع ہو۔ ا ب کو ملاکر منحرف کو دو مثلثوں میں تقسیم کرو، اور ا اور ب سے $\frac{ل}{۳}$ کے فاصلہ پر انتصابی خطوط لا لا اور ما ما کھینچو۔ مثلثوں ا ا ب اور ب ا ب کے مرکزِ ہندسی علی الترتیب خطوط لا لا اور ما ما پر واقع ہونگے اور اب مسئلہ یہ ہوجاتا ہے کہ منحنی ا ج د ب کے مجموعی رقبے کو (جسے ہم بہ سے تعبیر کرینگے) دو رقبوں میں تقسیم کیا جائے جو خطوط لا لا اور ما ما میں عمل کریں۔ یہ اِس طرح ہوسکتا ہے کہ رقبوں کو انتصابی قوتیں مان کر ایک سمتی خط ۰، ۱ کھینچا جائے جو رقبہ بہ کو تعبیر کرے۔ کوئی موزوں قطب ط لے کر ۰، ط اور ۱، ط کو ملاؤ اور انتصابی خطوط لا لا، گ گ، اور ما ما کو قطع کرتے ہوئے خطوط (۰، ط) اور (۱، ط) کے متوازی خطوط لا گ اور گ ما کھینچو اور لا، ما کو ملاؤ۔ تب لا ما کے متوازی ط ۲ کو کھینچا جائے تو ۱، ۲ سے وہ رقبہ حاصل ہوگا جو خط ما ما میں عمل کرنا چاہیے اور ۲، ۰ سے وہ رقبہ جو لا لا میں عمل کرنا چاہیے۔

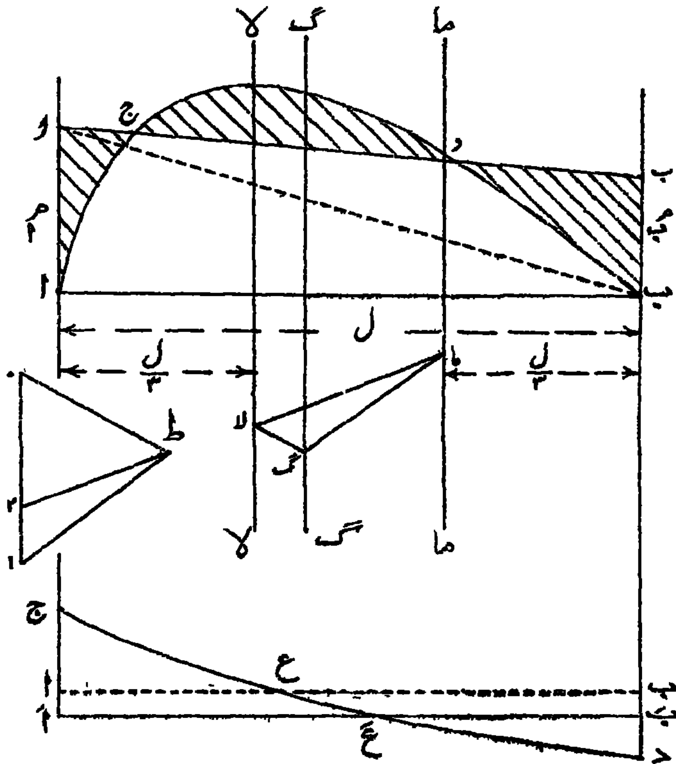
تب $م_ا \times \frac{ل}{۲}$ = مثلث ا ا ب کا رقبہ = (۲، ۰)

$$\therefore \quad م_ا = \frac{۲ \times (۰،۲)}{ل}$$

اسی طرح

$$م_ب = \frac{۲ \times (۲،۱)}{ل}$$

اِس کی مدد سے خماؤ کے معیار کا نقشہ کھینچا جاسکتا ہے۔



شکل ۹۷

ثابت شہتیروں کی عام صورت

جز کا نقشہ ـــــ اس صورت میں چونکہ سروں کے خماؤ کے معیار مساوی نہیں اس لیے جز کا نقشہ وہ نہیں ہوگا جو آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے ہوتا بلکہ اساسی خط ہٹا ہوا ہوگا۔ اور چونکہ کسی نقطے پر جز خماؤ کے معیار کے منحنی کا ڈھال ہے اس لیے جز کے منحنی کا اساسی خط بقدر $\frac{م_ا - م_ب}{ل}$ کے نیچے ہٹ جائیگا کیونکہ آزادانہ سہارے ہوئے اور ثابت شہتیر کے

اساسی خطوں کے ڈھالوں کا فرق یہی ہے۔ اگر شکل میں ا ج ع د ب آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کا جزی نقشہ اسی لداؤ کے ساتھ ہو تو سروں کو نصب کرنے کا اثر یہ ہوگا کہ اساسی خط بقدر ا اَ = ب بَ = $\frac{\text{م}_{۲} - \text{م}_{\text{ب}}}{\text{ل}}$ کے نیچے اتر آئیگا اور اِس طرح نقشہ اَ ج عَ د بَ حاصل ہوگا۔

خاص صورت ـــــ ثابت شہتیر پر ہموار طور پر بڑھتا ہوا بوجھ۔

فرض کرو کہ فصل ل کے ایک شہتیر ا ب پر ایک بوجھ ہے جس کی حدت ایک سرے سے دوسرے سرے کی طرف ہموار طور پر بڑھتی ہے، اور ب سے اکائی فاصلے پر حدت ب ٹن فی طولی فٹ ہے، اور مجموعی بوجھ و ٹن ہے۔ تب جیساکہ صفحہ ۱۵۹ پر دکھایا گیا ہے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے $\text{ر}_{\text{ب}} = \frac{\text{و}}{۳}$، $\text{ر}_{۱} = \frac{۲\text{و}}{۳}$، اور آزاد خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک تیسرے رُتبہ کا مکافی ہوگا، اور اعظم خماؤ کا معیار ۰.۱۲۸ و ل ہوگا اور ب سے فاصلہ ۰.۵۷۷ ل پر واقع ہوگا۔ اِس آزاد نقشے کا رقبہ $\frac{\text{و ل}^{۲}}{۱۲}$ ہوگا اور اِس کے مرکز ہندسی کا فاصلہ ب سے $\frac{۸\text{ل}}{۱۵}$ ہوگا۔

اس کو ریاضیاتی طور پر یوں ثابت کیا جا سکتا ہے :ـــ

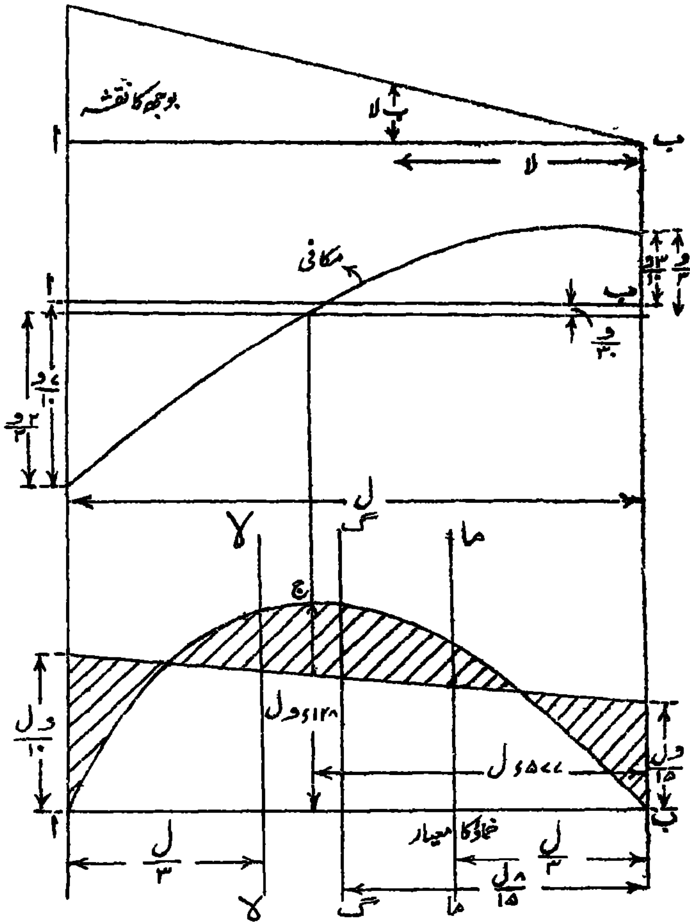
$$\text{خماؤ کے معیار کے منحنی کا رقبہ} = \int_{۰}^{\text{ل}} \text{م فرلا}$$

$$= \int_{۰}^{\text{ل}} \left(\frac{\text{ب ل}^{۲}\text{لا}}{۶} - \frac{\text{ب لا}^{۳}}{۶} \right) \text{فرلا}$$

$$= \left[\frac{\text{ب ل}^{۲}\text{لا}^{۲}}{۱۲} - \frac{\text{ب لا}^{۴}}{۲۴} + \text{ج} \right]_{۰}^{\text{ل}}$$

رقبہ = ۰ جب کہ لا = ۰ اس لیے ج = ۰

$$\therefore \text{ رقبہ } = \frac{ب\,ل^{۲}}{۱۲} - \frac{ب\,ل^{۲}}{۲۴} = \frac{ب\,ل^{۲}}{۲۴} = \frac{و\,ل^{۲}}{۱۲}$$



شکل ۹۸۔ ثابت شہتیر پر یکساں بڑھتا ہوا بوجھ

اس رقبے کا پہلا معیار ب میں کے انتصابی خط کے گرد $= \int_{۰}^{ل} م\,لا\,ڈلا$

$$= \int_{۰}^{ل} \left(\frac{ب\,ل^{۲}\,لا}{۶} - \frac{ب\,لا^{۳}}{۶} \right) ڈلا$$

$$= \left[\frac{ب\ ل^{۲}\ لا^{۲}}{۱۸} - \frac{ب\ لا^{۵}}{۳۰} + ج_{۱} \right]^{ل}$$

لیکن معیار = ۰ جب کہ لا = ۰ اس لیے $ج_{۱} = ۰$

$$\therefore \text{پہلا معیار} = \frac{ب\ ل^{۵}}{۱۸} - \frac{ب\ ل^{۵}}{۳۰} = \frac{ب\ ل^{۵}}{۴۵}$$

∴ مرکزِ ہندسی کا فاصلہ ب میں سے انتصابی خط سے = $\frac{\text{پہلا معیار}}{\text{رقبہ}}$

$$= \frac{ب\ ل^{۵}}{۴۵} \div \frac{ب\ ل^{۴}}{۲۴}$$

$$= \frac{۲۴\ ل}{۴۵} = \frac{۸\ ل}{۱۵}$$

اس سے خط گ گ کا تعین ہوتا ہے۔ خطوط لالا اور ماما میں عمل کرنے والے رقبے $\frac{و\ ل^{۲}}{۲۰}$ اور $\frac{و\ ل^{۲}}{۳۰}$ ہونے چاہییں کیونکہ مجموعی رقبہ $\frac{و\ ل^{۲}}{۱۲}$ خط ماما سے فاصلہ $\frac{۳\ ل}{۱۵}$ پر عمل کرتا ہے۔

∴ ماما کے گرد معیار لینے سے

$$\text{لالا میں عمل کرنے والا رقبہ} \times \frac{ل}{۳} = \frac{و\ ل^{۲}}{۱۲} \times \frac{۳\ ل}{۱۵}$$

$$\therefore \text{لالا میں عمل کرنے والا رقبہ} = \frac{و\ ل^{۳}}{۶۰} \div \frac{ل}{۳} = \frac{و\ ل^{۲}}{۲۰}$$

$$\therefore م_{ا} = \frac{و\ ل^{۲}}{۲۰} \times \frac{۲}{ل} = \frac{و\ ل}{۱۰}$$

$$\therefore م_{ب} = \frac{و\ ل^{۲}}{۳۰} \times \frac{۲}{ل} = \frac{و\ ل}{۱۵}$$

اِس طرح حاصل خماؤ کے معیار کا نقشہ وہ ہوگا جو شکل ۹۵ میں سایہ دار

دکھایا گیا ہے۔

جز کے لیے اساسی خط کا ہٹاؤ = (و ل / ۱۰ - و ل / ۱۵) ÷ ل = و / ۳۰

اِس طرح سروں پر جز علی الترتیب ۲ و / ۱۰ اور ۳ و / ۱۰ ہونگے، اور ثابت شہتیر کا جزی نقشہ وہ ہوگا جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

خط گ گ معلوم کرنے کا ترسیمی طریقہ ——— اگر لداؤ اِس طرح کا ہو کہ خط گ گ کا محل آسانی سے محسوب نہ ہوسکے تو حسب ذیل عمل کیا جا سکتا ہے:۔ آزاد خماؤ کے معیار کے نقشے اج ب کو متعدد انتصابی پٹیوں میں تقسیم کرو جن کا مساوی ہونا ضروری نہیں اور اِن پٹیوں کے مرکزوں میں سے انتصابی خطوطِ قوت کھینچو۔ اور ان کو ایک سمتی خط پر قایم کرو اور کوئی قطب لے کر رسیمانی کثیر الاضلاع کھینچو۔ پہلا اور آخری ضلع جہاں ملینگے وہ گ گ پر کا ایک نقطہ ہوگا۔ یہ وہی طریقہ ہے جو مور (Mohr) کے طریقے میں کسی شکل کا مرکز ہندسی معلوم کرنے کے لیے اختیار کیا گیا (باب ۳)۔ خماؤ کے معیار کے نقشے کا رقبہ "جمع منحنی" کے طریقے سے معلوم کیا جا سکتا ہے اور مسئلے کو اِس طرح پورا کیا جا سکتا ہے جس طرح شکل ۹۷ کے متعلق بیان کیا گیا ہے۔

ریاضیاتی بحث

جیسا کہ پہلے دکھایا گیا ہے:

شہتیر کا ڈھال = ∫ م / آ ے فرلا

اگر شہتیر کا سرا دربستہ ہو تو یہ ڈھال دونوں سروں پر صفر ہونا چاہیے۔

ذیل کی خاص صورتوں پر غور کرو:۔

ثابت شہتیر پر یکساں بوجھ ——— بوجھ کی حدت ب اور

مبدا مرکز پر لے کر مرکز سے فاصلہ لا پر ایک نقطہ پر غور کریں تو آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے

$$\text{م}_{\text{لا}} = \frac{\text{ب}}{۲}\left(\frac{\text{ل}^{۲}}{۴} - \text{لا}^{۲}\right)$$ (دیکھو صفحہ ۲۷۵)

فرض کرو کہ درستگی کی وجہ سے سرے کے خماؤ کا معیار $\text{م}_{۱}$ پیدا ہوتا ہے۔

تب ثابت شہتیر کے لیے $\text{م}_{\text{لا}} = \frac{\text{ب}}{۲}\left(\frac{\text{ل}^{۲}}{۴} - \text{لا}^{۲}\right) - \text{م}_{۱}$

$$\therefore \text{ڈھال} = \int \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{۱}{\text{آ ے}}\left(\frac{\text{ب ل}^{۲}\,\text{لا}}{۸} - \frac{\text{ب لا}^{۳}}{۶} - \text{م}_{۱}\,\text{لا} + \text{ج}\right)$$

ڈھال $= ۰$ جب کہ لا $= ۰$ $\therefore$ ج $= ۰$

نیز ڈھال $= ۰$ جب کہ لا $= \frac{\text{ل}}{۲}$

$$\therefore \frac{\text{ب ل}^{۳}}{۱۶} - \frac{\text{ب ل}^{۳}}{۴۸} - \text{م}_{۱}\frac{\text{ل}}{۲} = ۰$$

یعنی $\text{م}_{۱} \times \frac{\text{ل}}{۲} = \frac{\text{ب ل}^{۳}}{۱۶} - \frac{\text{ب ل}^{۳}}{۴۸} = \frac{\text{ب ل}^{۳}}{۲۴}$

$$\therefore \text{م}_{۱} = \frac{\text{ب ل}^{۲}}{۱۲}$$

انصراف معلوم کرنے کے لیے پھر تکمل کرنے سے

$$\text{انصراف} = \iint \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}\,\text{فرلا فرلا}$$

$$= \frac{۱}{\text{آ ے}}\left(\frac{\text{ب ل}^{۲}\,\text{لا}^{۲}}{۱۶} - \frac{\text{ب لا}^{۴}}{۲۴} - \frac{\text{م}_{۱}\,\text{لا}^{۲}}{۲} + \text{ج}_{۱}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{آے}}\left(\frac{\text{ب ل}^{2}\text{لا}^{2}}{16} - \frac{\text{ب لا}^{4}}{24} - \frac{\text{ب ل}^{2}\text{لا}^{2}}{24} + \text{ج}_{1}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{آے}}\left(\frac{\text{ب ل}^{2}\text{لا}^{2}}{48} - \frac{\text{ب لا}^{4}}{24} + \text{ج}_{1}\right)$$

یہ صفر ہے جب کہ $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{2}$

$$\therefore \quad \frac{\text{ب ل}^{4}}{192} - \frac{\text{ب ل}^{4}}{384} + \text{ج}_{1} = 0$$

یا $\text{ج}_{1} = \frac{-\text{ب ل}^{4}}{384}$

$\therefore$ جب $\text{لا} = 0$ تو انحراف $= \frac{\text{ج}_{1}}{\text{آے}} = \frac{-\text{ب ل}^{4}}{384\ \text{آے}}$

$\therefore$ اعظم انحراف $= \frac{\text{ب ل}^{4}}{384\ \text{آے}} = \frac{\text{و ل}^{3}}{384\ \text{آے}}$

خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے شکل ۹۵ کے مطابق ہونگے۔

(۲) ثابت شہتیر پر منفرد مرکزی بوجھ — حسب سابق فصل ل، اور مبداء مرکز پر، اور بوجھ و لینے سے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے

$$\text{م}_{\text{لا}} = \frac{\text{و}}{2}\left(\frac{\text{ل}}{2} - \text{لا}\right)$$

$\therefore$ اگر سروں کے ثابت ہونے کی وجہ سے سروں کا خماؤ کا معیار م_{1} ہو تو ثابت شہتیر کے لیے

$$\text{م}_{\text{لا}} = \frac{\text{و}}{2}\left(\frac{\text{ل}}{2} - \text{لا}\right) - \text{م}_{1}$$

$\therefore$ شہتیر کا ڈھال $= \int \frac{\text{م}}{\text{آے}}\ \text{فلا}$

$$= \left(\frac{\text{ول لا}}{۴} - \frac{\text{و لا}^{۲}}{۴} - \text{م}_{۱}\,\text{لا} + \text{ج}_{۲}\right) \times \frac{۱}{\text{آ ے}}$$

جب لا = ۰ تو ڈھال = ۰ ∴ ج₂ = ۰

جب لا = $\frac{\text{ل}}{۲}$ تو بھی ڈھال = ۰

اس لیے $۰ = \left(\frac{\text{و ل}^{۲}}{۸} - \frac{\text{و ل}^{۲}}{۱۶} - \text{م}_{۱}\frac{\text{ل}}{۲}\right) \times \frac{۱}{\text{آ ے}}$

$$\text{م}_{۱} \times \frac{\text{ل}}{۲} = \frac{\text{و ل}^{۲}}{۱۶}$$

$$\text{م}_{۱} = \frac{\text{و ل}}{۸}$$

انصراف کے لیے دوبارہ تکمل کرنے سے

$$\text{انصراف} = \iint \frac{\text{م}}{\text{آ ے}}\,\text{فرلا}\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{۱}{\text{آ ے}}\left(\frac{\text{ول لا}^{۲}}{۸} - \frac{\text{و لا}^{۳}}{۱۲} - \frac{\text{م}_{۱}\,\text{لا}^{۲}}{۲} + \text{ج}_{۳}\right)$$

$$= \frac{۱}{\text{آ ے}}\left(\frac{\text{ول لا}^{۲}}{۱۶} - \frac{\text{و لا}^{۳}}{۱۲} + \text{ج}_{۳}\right)$$

یہ صفر ہوتا ہے جب کہ لا = $\frac{\text{ل}}{۲}$

$$\frac{\text{و ل}^{۳}}{۶۴} - \frac{\text{و ل}^{۳}}{۹۶} + \text{ج}_{۳} = ۰$$

$$\therefore\quad \text{ج}_{۳} = \frac{-\text{و ل}^{۳}}{۱۹۲}$$

∴ جب لا = ۰ تو انصراف = $\frac{\text{ج}_{۳}}{\text{آ ے}}$

$$\therefore\quad \text{اعظم انصراف} = \frac{\text{و ل}^{۳}}{۱۹۲\,\text{آ ے}}$$

(۳) ثابت شہتیر پر ایک سرے سے ہموار طور پر بڑھتا ہوا بوجھ ——— فرض کرو کہ فصل اب پر جس کا طول ل ہے ایک ہموار طور پر بڑھتا ہوا بوجھ ہے جس کی حدت ب پر صفر ہے، اور فرض کرو کہ ب سے اکائی فاصلہ پر حدت ب اکائیاں فی طولی فٹ ہے۔ تب ب کو مبداء لینے سے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے:—

$$م_{لا} = \frac{ب ل^{۲} لا}{۶} - \frac{ب لا^{۳}}{۶}$$

اب فرض کرو کہ سروں کے خاؤ کے معیار $م_{ا}$ اور $م_{ب}$ ہیں۔ تب ب سے فاصلہ لا پر منفی خاؤ کا معیار

$$= م_{ب} + \frac{(م_{ا} - م_{ب})}{ل} \times لا$$

∴ ثابت شہتیر کے لیے

$$م_{لا} = \frac{ب ل^{۲} لا}{۶} - \frac{ب لا^{۳}}{۶} - م_{ب} - \frac{(م_{ا} - م_{ب}) \cdot لا}{ل}$$

∴ شہتیر کا ڈھال $= \int \frac{م}{آ\,سے}$ فرلا

$$= \frac{1}{آ\,سے} \left\{ \frac{ب ل^{۲} لا^{۲}}{۱۲} - \frac{ب لا^{۴}}{۲۴} - م_{ب} لا - \frac{(م_{ا} - م_{ب}) لا^{۲}}{۲ ل} + ج_{ا} \right\} \quad \text{......(1)}$$

جب $لا = ۰$، تو ڈھال $= ۰$ ∴ $ج_{ا} = ۰$

نیز $لا = ل$ پر بھی ڈھال $= ۰$

$$\therefore \frac{ب ل^{۴}}{۱۲} - \frac{ب ل^{۴}}{۲۴} - م_{ب} ل - \frac{(م_{ا} - م_{ب}) ل^{۲}}{۲ ل} = ۰$$

یا $-\frac{م_ب\,ل}{۲} - \frac{م_ا\,ل}{۲} = \frac{-ب\,ل^۳}{۲۴}$

∴ $م_ا + م_ب = \frac{ب\,ل^۲}{۱۲}$ .... (۲)

$م_ا$ اور $م_ب$ کے درمیان ایک اور ربط حاصل کرنے کے لیے انحراف پر غور کرو۔

تب انحراف $= \iint \frac{م}{آ\,ے}\,فلا\,فلا$

$= \frac{1}{آ\,ے}\left\{\frac{ب\,ل^۲\,لا^۳}{۳۶} - \frac{ب\,لا^۵}{۱۲۰} - \frac{م_ب\,لا^۲}{۲} - \frac{(م_ا - م_ب)}{ل} \times \frac{لا^۳}{۶} + ج_۵\right\}$ —(۳)

انحراف = ۰ جب کہ لا = ۰ ∴ $ج_۵ = ۰$

نیز انحراف = ۰ جب کہ لا = ل

∴ $\frac{ب\,ل^۵}{۳۶} - \frac{ب\,ل^۵}{۱۲۰} - \frac{م_ب\,ل^۲}{۲} - \frac{(م_ا - م_ب)}{ل} \times \frac{ل^۳}{۶} = ۰$

∴ $-\frac{م_ب\,ل^۲}{۲} - \frac{م_ا\,ل^۲}{۶} + \frac{م_ب\,ل^۲}{۶} = \frac{ب\,ل^۵}{۱۲۰} - \frac{ب\,ل^۴}{۳۶}$

∴ $\frac{م_ا\,ل^۲}{۶} + \frac{م_ب\,ل^۲}{۳} = \frac{۷\,ب\,ل^۵}{۳۶۰}$

∴ $م_ا + ۲\,م_ب = \frac{۷\,ب\,ل^۳}{۶۰}$ .... (۴)

∴ (۲) اور (۴) کو ملانے سے:

$م_ب = \frac{۷\,ب\,ل^۳}{۶۰} - \frac{ب\,ل^۳}{۱۲}$

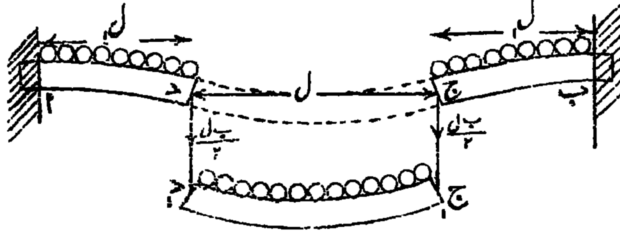
$= \frac{ب\,ل^۳}{۳۰} = \frac{و\,ل}{۱۵}$

∴ $م_ا = \frac{ب\,ل^۳}{۱۲} - \frac{ب\,ل^۳}{۳۰} = \frac{و\,ل}{۱۰}$

خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ۹۸ء میں دکھایا گیا ہے۔ اوپر کی تمام صورتوں میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ شہتیر کی تراش سارے طول میں مستقل ہے۔ اگر یہ صورت نہ ہو تو سروں کے خماؤ کے معیار اس طرح حاصل ہونگے کہ خماؤ کے معیار کا مصحح نقشہ لیا جائے جس کا بیان گزشتہ باب میں انصراف کے سلسلے میں آچکا ہے۔

ثابت شہتیروں کے فوائد اور نقصانات ——— گزشتہ مثالوں سے معلوم ہو چکا ہے کہ ثابت شہتیر متناظر آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر سے زیادہ مضبوط ہوتا ہے' اور ثابت شہتیر کا انصراف بھی کم ہوتا ہے اس طرح اس کی استواری اور صلابت زیادہ ہے۔ نیز ثابت شہتیروں میں' اکثر صورتوں میں' اعظم خماؤ کا معیار پہل پایوں پر واقع ہوتا ہے اور پہل پایوں پر تراش کو بڑھانے سے خماؤ کا معیار اور زورا تنے زیادہ نہیں بڑھتے۔ اس کے برخلاف آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر میں اعظم خماؤ کا معیار مرکز پر ہوتا ہے اور مرکز پر تراش بڑھانے سے خماؤ کا معیار خاصا بڑھ جاتا ہے۔ ان فوائد کے باوجود جو ثابت شہتیر زیادہ عام نہیں تو اس کی وجہ یہ ہے کہ سروں کو مضبوطی سے ثابت کرنے میں' دونوں سروں پر کے مماس بالکل افقی ہونے چاہییں۔ اگر اس سے ذرا سا انحراف ہو تو زور بدل جائینگے اور اگر غیر مساوی بیٹھاؤ کی وجہ سے دونوں سروں کا لیول ایک ہی نہ ہو تو شہتیر میں قابلِ لحاظ زور پیدا ہو جائینگے۔ نیز اگر شہتیر چنائی میں مضبوطی سے چُنا ہوا ہو تو تپش کے تغیرات کی وجہ سے بھی قابلِ لحاظ زور پیدا ہوتا ہے۔ اور ان سب باتوں کی وجہ سے عملی صورتوں میں حقیقی زور کسی قدر غیر معین ہوتے ہیں۔ اس وجہ اکثر مجوز اس قسم کے شہتیر کا استعمال نہیں کرتے۔ اوپر کے تمام نقائص اس طرح دُور ہو سکتے ہیں کہ شہتیر کو نقاطِ انعطاف پر کاٹ دیا جائے اور بیچ کے حصے کو سروں کے حصوں پر ٹکایا جائے۔ برآمدلا بیونجی گرڈر کی ساخت کا یہی اصول ہے اور بڑے فصلوں میں بہت باکفایت ثابت ہوتا ہے۔ اس ساخت کو شکل ۹۸ ک میں دکھایا گیا ہے جس میں ایک ثابت شہتیر ا ب کو نقاطِ انعطاف ج اور د پر تقسیم کیا گیا ہے اور وسطی حصے کو سروں کے حصوں سے

لٹکتا ہوا دکھایا گیا ہے - وسطی حصے میں خماؤ کا معیار وہی ہوگا جو فصل ل کے آزادانہ سہارے ہوئے اور دیے ہوئے لداؤ کے مطابق لدے ہوئے شہتیر کے لیے ہوتا۔



شکل ۹۸ و

برآمدہ بیرم نما حصوں کے لیے خماؤ کا معیار وہ ہوگا جو فصل ل کے برآمدہ بیرم میں ہوتا جس پر لداؤ دیے ہوئے لداؤ کے مطابق ہو اور اس کے علاوہ سرے پر ایک بوجھ وسطی حصے کے ردّ عمل کے مساوی ہو۔ شکل میں یکساں لداؤ دکھایا گیا ہے اور اِس صورت میں یہ ردِّ عمل $\frac{\text{ب ل}}{۲}$ کے مساوی ہیں۔ یہ پایا جائیگا کہ اِس طرح جو حاصل خماؤ کے معیار اور جز کے منحنی حاصل ہونگے وہ شکل ۹۵ کے جیسے ہونگے۔ انصراف بھی اس طرح حاصل ہو سکتے ہیں کہ وسطی حصہ کے مرکز کے انصراف کو اور ایک برآمدہ بیرم نما حصے کے سرے کے انصراف کو باہم جمع کیا جائے۔

ثابت شہتیر جس کے سرے ایک لیول میں نہ ہوں —

فرض کرو کہ ایک ثابت شہتیر ا ب (شکل ۹۹) کے سرے ایک لیول میں نہیں۔ تب شہتیر پر کے لداؤ سے قطع نظر کرکے شہتیر کی منصرف وضع وہ ہوگی جو شکل میں دکھائی گئی ہے۔ نقطۂ انعطاف⁵ مرکز ج پر ہوگا۔

شہتیر کو ج پر تقسیم کیا جائے تو حصہ ا ج کا انصراف ب ع وہ ہوگا جو ج پر کسی بوجھ ب کے لٹکنے سے ہوتا۔ برآمدہ بیرم کے سرے پر بوجھ ہو تو

⁵ contraflexure

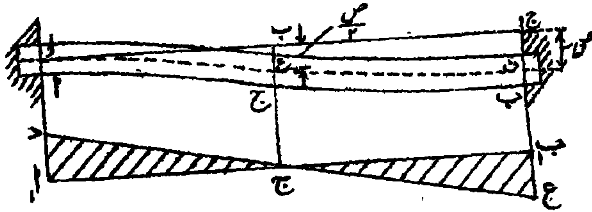
$$ص = \frac{و ل^۳}{۳ آ ے}$$

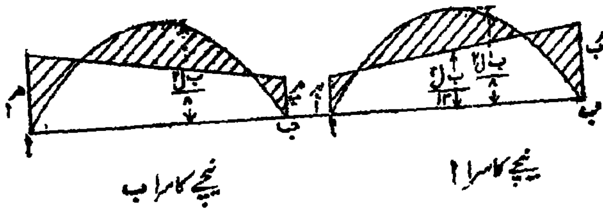
موجودہ صورت میں ب ع $= \frac{ب \left(\frac{ل}{۲}\right)^۳}{۳ آ ے}$

∴ $ب = \frac{۲۴ آ ے \times ب ع}{ل^۳}$

$$= \frac{۱۲ آ ے \times ج ف}{ل^۳}$$

$$= \frac{۱۲ آ ے \times ص}{ل^۳}$$





شکل ۹۹۔ شہتیر جن کے سرے مختلف لیولوں پر ہوں

اِس کی وجہ سے خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مثلث ج ا د ہوگا جس میں
ا د = ب × $\frac{ل}{۲}$

$$\therefore \quad ا_1 د = \frac{12 \text{ آ}_{\text{ے}} \times \text{ص}}{2 \text{ ل}^2} = \frac{6 \text{ آ}_{\text{ے}} \text{ص}}{\text{ل}^2}$$

اسی طرح حصہ ج ب اس طرح ہے گویا اس کے سرے پر ایک بوجھ ب اوپر وار عمل کر رہا ہے۔ اس حصے کے لیے خماؤ کا معیار ج ب ع ہوگا جس میں ب ع = ا ، د
اس لیے مکمل نقشہ حاصل کرنے کے لیے اس کو ثابت شہتیر کے معمولی نقشے کے ساتھ مرکب کرنا ہوگا۔ شکل میں دونوں صورتوں کے اثرات دکھائے گئے ہیں۔ ایک وہ جس میں ب نیچا ہے۔ دوسری وہ جس میں اونچا ہے۔
وہ شرط کہ سروں کے خماؤ کے معیار کا نقشہ رقبے میں آزاد نقشے کے مساوی ہونا چاہیے اس صورت میں بھی درست ہے البتہ ان کے مرکز ہندسی ایک انتصابی خط میں نہیں ہونگے کیونکہ ایک سرے پر انحراف پایا جاتا ہے۔
مور (Mohr) کے مسئلے کی خیالی طناب کے ذریعے دکھایا جا سکتا ہے کہ آ ے × ص = خماؤ کے معیار کے منحنی کا رقبہ × آزاد نقشے اور سروں کے نقشے کے مراکز ہندسی کے درمیان کا افقی فاصلہ گ۔

$$\text{یعنی} \quad \text{آ}_{\text{ے}} \times \text{ص} = \frac{\text{ب ل}^2}{12} \times \text{ل} \times \text{گ}$$

$$\therefore \quad \text{گ} = \frac{12 \text{ آ}_{\text{ے}} \times \text{ص}}{\text{ب ل}^3}$$

اب اگر سروں کے خماؤ کے معیار $م_ا$ اور $م_ب$ ہوں تو سروں کا نقشہ ایک منحرف ہوگا۔

$$\therefore \quad \text{گ} = \frac{\text{ل}}{2} - \frac{\text{ل}}{3}\left(\frac{2 م_ب + م_ا}{م_ب + م_ا}\right)$$

$$= \frac{\text{ل}}{6} \frac{(م_ا - م_ب)}{(م_ب + م_ا)}$$

$$\therefore\quad م_{ا} - م_{ب} = \frac{6\,(م_{ب} + م_{ا})\,گ}{ل} = 6 \times \frac{ب\,ل^{2}}{12} \times \frac{گ}{ل}$$

$$= \frac{12\ آ\,ے\,ص}{ل^{2}}$$

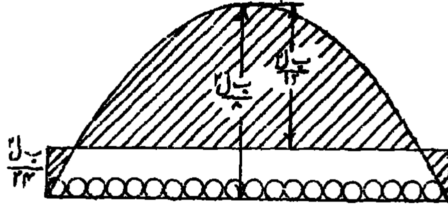
اب شکل میں $م_{ا} - م_{ب} = 2\,ا_{1}د$

$$\therefore\quad ا_{1}د = \frac{م_{ا} - م_{ب}}{2} = \frac{6\ آ\,ے\,ص}{ل^{2}}$$

اس سے وہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے جو سابقہ استدلال سے حاصل ہوا۔

شہتیر جن میں کلیٹ دار رابطے وغیرہ ہوں ——— تعمیروں کے کاموں میں گرڈروں کو ستونوں یا کھموں کے ساتھ کلیٹ دار رابطوں کے ذریعے جوڑا جاتا ہے جن کی استواری اور صلابت کی وجہ سے یہ امر مشکوک ہو جاتا ہے کہ گرڈر ایک آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کا عمل کریگا اگرچہ حساب لگانے میں ان کی مضبوطی ہمیشہ اسی امر پر مبنی رہتی ہے۔ اور معمولی کلیٹ اتنے استوار بھی نہیں ہوتے کہ ان گرڈروں کو ثابت سمجھا جائے۔ ایسے شہتیروں کا حقیقی خماؤ کے معیار کا نقشہ آزادانہ سہارے ہوئے اور ثابت شہتیر کے درمیان ہوگا۔ ایک خیال یہ ظاہر کیا گیا ہے کہ ان شہتیروں کو "نیم ثابت" سمجھا جائے' یعنی یکساں لداؤ کی صورت میں سروں کے خماؤ کے معیار $\frac{ب\,ل^{2}}{24}$ لیے جائیں۔ اس طرح خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ع۱۰۰ کے مطابق ہوگا۔ دیکھو اعظم خماؤ کا معیار اس صورت میں بھی ثابت شہتیر کی طرح $\frac{ب\,ل^{2}}{12}$ ہی ہے البتہ یہ اس صورت میں امرکز پر واقع ہوتا ہے۔

جن شہتیروں کے مادے کی تنشی اور فشاری مضبوطیاں مختلف ہوں' مثلاً ڈھلے لوہے اور محکم کنکریٹ کے شہتیر ان میں یہ اچھی طرح یاد رہے کہ سروں پر تنشی پہلو اوپر کا ہے اور ان سروں پر اوپر کے پہلو میں مزید مضبوطی شریک کرلی چاہیے۔ اس کی مزید مثالیں محکم کنکریٹ کے باب میں پیش آئینگی۔



شکل ۱۰۰

یہ بھی یاد رہے کہ ان سب صورتوں میں ہم نے شہتیر کی تراش کو سارے طول میں مستقل مانا ہے۔ اگر کسی صورت میں ایسا نہ ہو تو نتائج صحیح نہیں ہونگے۔

مسلسل شہتیر

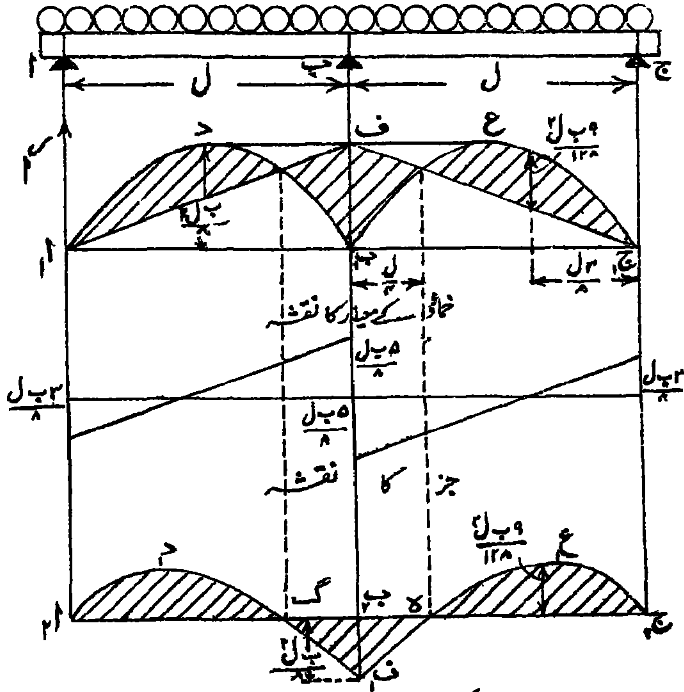
اگر ایک شہتیر متعدد سہاروں ا، ب، ج، وغیرہ، پر مسلسل ہو تو شہتیر کی منصرف وضع ایسی ہی کوئی ہوگی جیسی کہ شکل ۱۰۱ میں دکھائی گئی ہے جس میں



شکل ۱۰۱

انحنا کی سمت نقاط و، ب، ج، د پر بدلتی ہے۔ ثابت شہتیروں کی طرح انحنا کی تبدیلی کے معنے یہ ہیں کہ سہاروں پر منفی خماؤ کے معیار ہونگے۔ ان خماؤ کے معیاروں کو ہم آیندہ "سہاروں کے معیار" کہینگے۔
پہلے ایک مسلسل شہتیر ا ب ج (شکل ۱۰۲) پر غور کرو جس کے دو مساوی فصل

طول ل کے ہیں جس پر ایک یکساں بوجھ ب ٹن فی طولی فٹ کا ہے۔



شکل ۹-۱۰۱۔ یکساں لدا ہوا مسلسل شہتیر دو فصل کا

سہارے ۱، ب، ج ایک ہی سطح میں ہیں اور شہتیر کی تراش یکساں ہے۔ اب وسطی سہارے کو خیالی طور پر ہٹا دو تو ایک وسطی انصراف

$$صہ = \frac{۵ ب (۲ ل)^{۴}}{۳۸۴ آ سے}$$

پیدا ہوگا۔

اب وسطی سہارے کو پھر اس کی جگہ رکھ دو تو اس پر دباؤ سہا ب کی مقدار

ایسی ہوگی کہ اس سے ایک مرکزی بوجھ کی حیثیت سے انحراف صہ پیدا ہو۔

$$\therefore \quad \text{صہ} = \frac{\text{ر} \times (\text{۲ ل})^{۳}}{\text{۴۸ آ ے}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ر} \times (\text{۲ل})^{۳}}{\text{۴۸ آ ے}} = \frac{\text{۵ ب (۲ ل)}^{۴}}{\text{۳۸۴ آ ے}}$$

$$\therefore \quad \text{ر} = \frac{\text{۵ ب} \times \text{۲ ل}}{\text{۸}} = \frac{\text{۵ ب ل}}{\text{۴}}$$

یعنی اگر ایک فصل پر بوجھ و ہو تو $\text{ر} = \frac{\text{۵ و}}{\text{۴}}$

اور چونکہ تشاکل سے $\text{ر}_{\text{ا}} = \text{ر}_{\text{ج}}$ اور $\text{ر}_{\text{ا}} + \text{ر}_{\text{ب}} + \text{ر}_{\text{ج}} = \text{۲ و}$

اِس لیے $\text{ر}_{\text{ا}} = \text{ر}_{\text{ج}} = \frac{\text{۳ و}}{\text{۸}} = \frac{\text{۳ ب ل}}{\text{۸}}$

دونوں فصل علحدہ ہوتے تو $\text{ر}_{\text{ا}} = \text{ر}_{\text{ج}} = \frac{\text{و}}{\text{۲}}$

اِس لیے سہاروں کے معیاروں کا نقشہ ایسا ہوگا گویا کہ ا اور ج پر ایک اوپروار قوت $\frac{\text{و}}{\text{۸}}$ عمل کر رہی ہے۔ اِس سے ب پر خماؤ کا معیار $\frac{\text{و}}{\text{۸}} \times \text{ل} = \frac{\text{و ل}}{\text{۸}}$ پیدا ہوگا۔ اِس طرح ب پر منفی خماؤ کا معیار $- \frac{\text{و ل}}{\text{۸}} = - \frac{\text{ب ل}^{۲}}{\text{۸}}$ اور اس طرح مسلسل شہتیر کے خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ۱۰۲ء کے مطابق ہوگا۔

چونکہ ا اور ج پر کے ردّ عمل $\frac{\text{۳}}{\text{۸}}$ ب ل ہیں، اس لیے جزء کے نقشے کے معین ان نقاط پر $\frac{\text{۳}}{\text{۸}}$ ب ل ہونگے۔ اور جزء ج سے ب تک ہموار طور پر گھٹتے ہوئے ب پر $- \frac{\text{۵}}{\text{۸}}$ ب ل ہوگا۔ یہاں ایک دم بڑھ کر $+ \frac{\text{۵}}{\text{۸}}$ ب ل ہوجائیگا کیونکہ $\text{ر}_{\text{ب}} = \frac{\text{۵}}{\text{۴}}$ ب ل۔ پھر دوبارہ گھٹتے ہوئے ا پر $- \frac{\text{۳}}{\text{۸}}$ ب ل ہوگا اور جزء کا نقشہ شکل کے مطابق ہوگا۔

نقاطِ انعطاف گ، ھ، جہاں خماؤ کا معیار صفر ہوتا ہے ب سے $\frac{ل}{۴}$ کے فاصلے پر واقع ہوتے ہیں۔

اس کا ثبوت حسبِ ذیل ہے:—

فرض کرو کہ ھ کا فاصلہ ج سے لا ہے۔

تب سہاروں کے معیار کی وجہ سے منفی خماؤ کا معیار $= \frac{و\ لا}{۸} = \frac{ب\ ل\ لا}{۸}$

آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے مثبت خماؤ کا معیار $= \frac{ب\ ل\ لا}{۲} - \frac{ب\ لا^{۲}}{۲}$

یہ دونوں مساوی ہونے چاہییں اس لیے

$$\frac{ب\ ل\ لا}{۸} = \frac{ب\ ل\ لا}{۲} - \frac{ب\ لا^{۲}}{۲}$$

$$\therefore \quad \frac{لا}{۲} = \frac{ل}{۲} - \frac{ل}{۸} = \frac{۳ل}{۸}$$

$$\therefore \quad لا = \frac{۳ل}{۴}$$

$$\therefore \quad ب\ سے\ فاصلہ = ل - \frac{۳ل}{۴} = \frac{ل}{۴}$$

اگر خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک خطِ مستقیم کی اساس پر تحویل کیا جائے تو وہ نقشہ حاصل ہوگا جو شکل میں نیچے دیا گیا ہے۔

درمیانی اعظم خماؤ کے معیار ج اور د سے فاصلہ $\frac{۳ل}{۸}$ پر واقع ہونگے۔ اور حسبِ ذیل ہونگے:—

$$\frac{ب\ ل}{۲} \times \frac{۳ل}{۸} - \frac{ب}{۲}\left(\frac{۳ل}{۸}\right)^{۲} - \frac{ب\ ل}{۸} \times \frac{۳ل}{۸}$$

$$= ب\ ل^{۲}\left(\frac{۳}{۱۶} - \frac{۹}{۱۲۸} - \frac{۳}{۶۴}\right)$$

contraflexure ھ

$$= \frac{\text{۹ ب ل}^{۲}}{\text{۱۲۸}} = \frac{\text{۹ و ل}}{\text{۱۲۸}}$$

دو مساوی اور یکساں لدے ہوئے فصل لیکن سہارے ایک سطح میں نہیں

اب اُس صورت پر غور کرو کہ مرکزی سہارا ب سہاروں ا اور ج سے مختلف سطح میں ہے اور ا ج سے فاصلہ ھ کے بقدر نیچے ہے۔ (شکل ۱۰۳)۔

حسب سابق اگر سہارا ب نکال لیا جائے تو مرکزی انصراف

$$\text{صہ} = \frac{\text{۵ ب (۲ ل)}^{۴}}{\text{۳۸۴ آ سے}}$$

پیدا ہوگا۔

اب ب پر کار ردِ عمل صرف اتنا ہے جس سے ایک اوپر وار انصراف صہ - ھ پیدا ہو۔

$$\therefore \quad \text{صہ} - \text{ھ} = \frac{\bar{\text{ب}}\,\text{(۲ ل)}^{۳}}{\text{۴۸ آ سے}}$$

$$\therefore \quad \bar{\text{ب}} = \frac{\text{۴۸ آ سے}}{\text{(۲ ل)}^{۳}}\,(\text{صہ} - \text{ھ})$$

$$= \frac{\text{۴۸ آ سے}}{\text{(۲ ل)}^{۳}}\,\text{صہ}\left(\text{۱} - \frac{\text{ھ}}{\text{صہ}}\right)$$

$$\therefore \quad \bar{\text{ب}} = \frac{\text{۴۸ آ سے}}{\text{(۲ ل)}^{۳}} \times \frac{\text{۵ ب (۲ ل)}^{۴}}{\text{۳۸۴ آ سے}}\left(\text{۱} - \frac{\text{ھ}}{\text{صہ}}\right)$$

$$= \frac{\text{۵ ب ل}}{\text{۴}}\left(\text{۱} - \frac{\text{ھ}}{\text{صہ}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

$$= \frac{\text{۵ ب ل}}{\text{۴}} - \frac{\text{۵ ب ھ ل}}{\text{۴ صہ}}$$

$$\therefore \quad \text{س}_{\text{ا}} = \text{س}_{\text{ج}} = \frac{\text{۳ ب ل}}{\text{۸}} + \frac{\text{۵ ھ ب ل}}{\text{۸ ص}}$$

$$= \frac{\text{ب ل}}{\text{۲}} - \frac{\text{ب ل}}{\text{۸}}\left(\text{۱} - \frac{\text{۵ ھ}}{\text{ص}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۲})$$

∴ پہلے کے سے استدلال سے $\text{س}_{\text{ا}}$ یا $\text{س}_{\text{ج}}$ کی قیمت کے دوسرے حصے کی وجہ سے ب پر منفی خماؤ کا معیار

$$= \frac{\text{ب ل}^{\text{۲}}}{\text{۸}}\left(\text{۱} - \frac{\text{۵ ھ}}{\text{ص}}\right)$$

$$\therefore \quad \text{م}_{\text{ب}} = \frac{\text{ب ل}^{\text{۲}}}{\text{۸}}\left(\text{۱} - \frac{\text{۵ ھ}}{\text{ص}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{۳})$$

اس لیے خماؤ کے معیار کا منحنی کچھ اس طرح کا ہوگا جیسا کہ سایہ دار دکھایا گیا ہے۔ اس میں د کا محل $\frac{\text{ھ}}{\text{ص}}$ کی قیمت پر منحصر ہوگا۔

اب ھ کی حسب ذیل خاص قیمتوں پر غور کرو:—

اگر ھ = ۰ تو $\text{م}_{\text{ب}} = \frac{\text{ب ل}^{\text{۲}}}{\text{۸}}$ گزشتہ صورت کی طرح۔

اگر $\text{ھ} = \frac{\text{ص}}{\text{۵}}$ تو $\text{م}_{\text{ب}} = \text{۰}$، اور خماؤ کا معیار وہی ہوگا جو کہ دو سادہ سہارے ہوئے شہتیروں کے لیے ہوتا۔

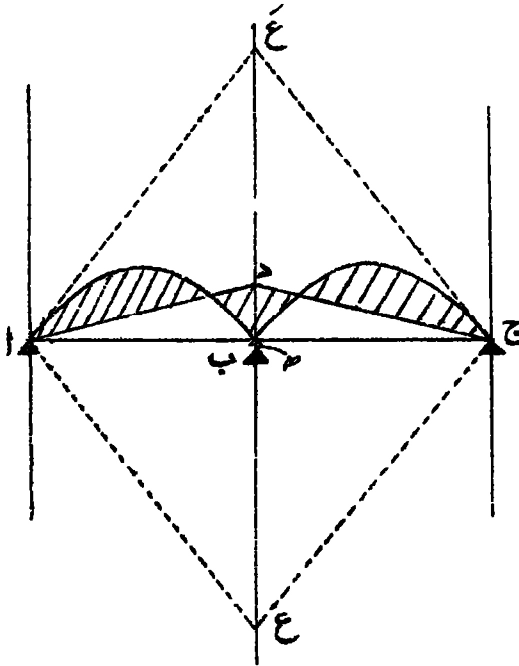
اگر ھ = ص تو $\text{م}_{\text{ب}} = \frac{\text{ب ل}^{\text{۲}}}{\text{۸}}(\text{۱} - \text{۵}) = -\frac{\text{ب ل}^{\text{۲}}}{\text{۲}}$ اور یہ وہی ہوگا جو فصل ۲ ل کے ایک سادہ سہارے ہوئے شہتیر کے لیے ہوتا۔

اب فرض کرو کہ $\text{ھ} = -\frac{\text{۳ ص}}{\text{۵}}$

تو $\text{م}_{\text{ب}} = \frac{\text{ب ل}^{\text{۲}}}{\text{۸}}(\text{۱}+\text{۳}) = \frac{\text{ب ل}^{\text{۲}}}{\text{۲}}$، اور یہ وہی ہے جو کہ سہاروں ۱ اور ج کو نکال دینے اور شہتیر کو دو برآمدہ بیرموں ب ۱ اور ب ج پر مشتمل کرنے سے ہوتا۔ سروں پر انصراف اس صورت میں $= \frac{\text{ب ل}^{\text{۴}}}{\text{۸ آ ے}}$،

اور یہ ۳/۵ صہ کے مساوی ہوگا۔

اگر شہتیر ایک مسلسل شہتیر کا عمل کرتا ہے تو صہ کو صہ اور ۳/۵ صہ کے درمیان ہونا چاہیے۔ اس لیے ب میں سے انتصابی خط پر نقاط عَ، عَ ایسے لو کہ ب عَ = ب ع = ب ل^۲/۲، تب مسلسل شہتیر کے لیے جس کے سہارے ایک سطح میں نہ ہوں خماؤ کے معیار کے نقشے کا بند کرنے والا خط ا ع ج اور ا عَ ج کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔



شکل ۱۳۲

مسلسل شہتیر تین سہاروں کا جو ایک سطح میں نہیں

اس مسئلے پر ذیل کی مثال دلچسپی سے خالی نہ ہوگی :-

ایک مسلسل شہتیر پر جس کی تراش یکساں ہے اور جس کے دو مساوی فصل طول ل کے ہیں حمل ت ب کا ایک یکساں بوجھ ہے، اور سہارے ا، ب، ج ابتداءً ایک سطح میں ہیں لیکن سہاروں کے ستون مساوی طور پر لچکدار ہیں اور ان کو اکائی فاصلہ دبانے کے لیے قوت ع درکار ہوتی ہے۔ ہم کنہی ردِّعمل اور خماؤ کا معیار معلوم کرو۔

اگر وسطی ستون ہٹا دیا جائے تو $صہ = \frac{5 ب (2 ل)^4}{384 آ ے}$

$\frac{سب}{2}$ کی وجہ سے اوپر وار انحراف $= صہ_1 = \frac{سب (2 ل)^3}{48 آ ے}$

تب صہ ۔ صہ$_1$ = ا ب، ج کی آخری سطحوں کا فرق

اب فرض کرو کہ $سب = ب ل + 2 ف$، جہاں ۲ ف شہتیر کے مسلسل ہونے کی وجہ سے دباؤ کا اضافہ ہے۔ تب

$$س_ا = س_ج = \frac{ب ل}{2} - ف$$

$\therefore$ وسطی ستون کا دھنساؤ $= \frac{ب ل + 2 ف}{ع}$

سروں کے ستونوں کا دھنساؤ $= \frac{\frac{ب ل}{2} - ف}{ع}$

$\therefore$ فرق $= صہ - صہ_1 = \frac{1}{ع}\left(\frac{ب ل}{2} + 3 ف\right)$

$$= \frac{1}{ع}\left(\frac{3 سب}{2} - ب ل\right)$$

$$\therefore \frac{۱}{\text{ع}}\left(\frac{۳\,\text{ک}_{\text{ب}}}{۲} - \text{ب ل}\right) = \text{ص} - \text{ص}_{۱}$$

$$= \frac{۵\,\text{ب ل}^{۲}}{۲۴\,\text{آ ے}} - \frac{\text{ک}_{\text{ب}}\,\text{ل}^{۳}}{۶\,\text{آ ے}}$$

$$\therefore \text{ک}_{\text{ب}}\left(\frac{۳}{۲\,\text{ع}} + \frac{\text{ل}^{۳}}{۶\,\text{آ ے}}\right) = \frac{۵\,\text{ب ل}^{۳}}{۲۴\,\text{آ ے}} + \frac{\text{ب ل}}{\text{ع}}$$

$$\therefore \text{ک}_{\text{ب}} = \frac{\dfrac{\text{ب ل}}{\text{ع}} + \dfrac{۵\,\text{ب ل}^{۳}}{۲۴\,\text{آ ے}}}{\dfrac{۳}{۲\,\text{ع}} + \dfrac{\text{ل}^{۳}}{۶\,\text{آ ے}}}$$

$$= \text{ب ل}\left\{\frac{\dfrac{۱}{\text{ع}} + \dfrac{۵\,\text{ل}^{۲}}{۲۴\,\text{آ ے}}}{\dfrac{۳}{۲\,\text{ع}} + \dfrac{\text{ل}^{۳}}{۶\,\text{آ ے}}}\right\}$$

$$= \text{ب ل}\left\{\frac{\dfrac{۶\,\text{آ ے}}{\text{ع ل}^{۳}} + \dfrac{۵}{۴}}{\dfrac{۹\,\text{آ ے}}{\text{ع ل}^{۳}} + ۱}\right\}$$

پہلے کے سے استدلال سے

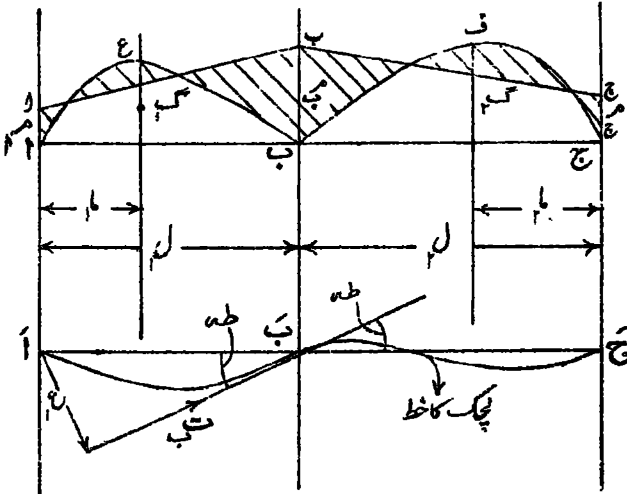
$$\text{م}_{\text{ب}} = \frac{\text{ب ل}^{۲}}{۲}\left\{۱ - \frac{\dfrac{۶\,\text{آ ے}}{\text{ع ل}^{۳}} + \dfrac{۵}{۴}}{\dfrac{۹\,\text{آ ے}}{\text{ع ل}^{۳}} + ۱}\right\}$$

$$\frac{\text{ب}\,\text{ل}^{2}}{\text{۲}} = \left\{ \frac{\frac{\text{۱}}{\text{۴}} - \frac{\text{۳}\,\text{آ}\,\text{ے}}{\text{ع}\,\text{ل}^{3}}}{\text{۱} + \frac{\text{۹}\,\text{آ}\,\text{ے}}{\text{ع}\,\text{ل}^{3}}} \right\}$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر تینوں پائے ایک ہی شے کے ہوں اور ان کے رقبے ردِّ عملوں کے متناسب ہوں تو لچک کی وجہ سے اُن کا دھنساؤ مساوی ہوگا اور اس صورت میں خماؤ کے معیار کا نقشہ وہی رہیگا جو شکل ۱۰۲ میں دکھایا گیا ہے۔

تین معیاروں کا مسئلہ — اب ہم معلوم کرینگے کہ اگر ایک مسلسل شہتیر میں فصلوں کی کوئی تعداد ہو اور سب سہارے ایک ہی سطح میں ہوں تو سہاروں کے خماؤ کے معیاروں اور لداؤ میں کیا ربط ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک مسلسل شہتیر میں کئی فصل ہیں اور ا ب اور ب ج اس کے دو متصل فصل ہیں جن کے طول ل۱ اور ل۲ ہیں اور فرض کرو کہ ا ع ب اور ب ف ج (شکل ۱۰۴) ان فصلوں کے لداؤ کے آزاد خماؤ کے معیار کے نقشے ہیں۔



شکل ۱۰۴ ۔ تین معیاروں کا مسئلہ

فرض کرو کہ اِن آزاد نقشوں کے مرکزِ ہندسی گ_{1} اور گ_{2} ہیں، اور گ_{1} کا فاصلہ ا سے ہ_{1} اور گ_{2} کا ج سے ہ_{2} ہے اور ان نقشوں کے رقبے علی الترتیب س_{1} اور س_{2} ہیں۔ تب اگر ا، ب، ج کے سہاروں کے معیار $\text{م}_{\text{ا}}$، $\text{م}_{\text{ب}}$، $\text{م}_{\text{ج}}$ ہوں تو کلے پی راں[ل] کا تین معیاروں کا مسئلہ یہ ہے کہ

$$\text{م}_{\text{ا}}\,\text{ل}_{1} + 2\,\text{م}_{\text{ب}}(\text{ل}_{1}+\text{ل}_{2}) + \text{م}_{\text{ج}}\,\text{ل}_{2} = 6\left\{\frac{\text{س}_{1}\,\text{ہ}_{1}}{\text{ل}_{1}} + \frac{\text{س}_{2}\,\text{ہ}_{2}}{\text{ل}_{2}}\right\}$$

اس کو مور (Mohr) کے مسئلے کی مدد سے یوں ثابت کیا جا سکتا ہے: فرض کرو کہ آ ب ج شہتیر کی منصرف وضع یا لچک کا خط ہے۔ تب اگر شہتیر کا مادہ اور اس کی تراش سارے طول میں یکساں ہو تو لچک کا خط اُسی شکل کا ہوگا جو ایک خیالی طناب کی ہوگی جس پر بوجھ خماؤ کے معیار کے نقشے کا ہو اور جس میں افقی تناؤ $\text{آ} \times$ ے کے مساوی ہو۔ اب نقطہ ب پر خیالی طناب کے دونوں حصوں کا مماس مشترک ہے۔ فرض کرو کہ یہ مماس خط آ ب سے زاویہ طہ بناتا ہے اور فرض کرو کہ آ سے اِس پر عمود کا طول ع_{1} ہے، اور اس طناب میں ب پر تناؤ $\text{ت}_{\text{ب}}$ ہے۔ تب اس خیالی طناب کا فصل ا ب لے کر اس کے توازن پر غور کریں اور ا کے گرد معیار لیں تو

$\text{ت}_{\text{ب}} \times \text{ع}_{1}$ = خماؤ کے معیار کے نقشے کا معیار ا کے گرد

= $\text{س}_{1}\,\text{ہ}_{1}$ ۔ سہاروں کے معیاروں کے نقشے کا معیار ا کے گرد

$$= \text{س}_{1}\,\text{ہ}_{1} - \text{م}_{\text{ا}}\frac{\text{ل}_{1}}{2}\times\frac{\text{ل}_{1}}{3} - \text{م}_{\text{ب}}\frac{\text{ل}_{1}}{2}\times\frac{2\,\text{ل}_{1}}{3}$$

$$= \text{س}_{1}\,\text{ہ}_{1} - \frac{\text{م}_{\text{ا}}\,\text{ل}_{1}^{2}}{6} - 2\,\text{م}_{\text{ب}}\frac{\text{ل}_{1}^{2}}{6} \quad \text{.................}(1)$$

کیونکہ سہاروں کے معیاروں کے نقشے کو دو مثلثوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جن کے رقبے $\text{م}_{\text{ا}}\frac{\text{ل}_{1}}{2}$ اور $\text{م}_{\text{ب}}\frac{\text{ل}_{1}}{2}$ ہوں گے، اور جن کے مراکزِ ہندسی کے فاصلے

[ل] clapeyron

آ سے $\frac{\text{ل}_۱}{۳}$ اور $\frac{۲\,\text{ل}_۱}{۳}$ ہونگے۔ اب $\text{ع}_۱ = \text{ل}_۱\ \text{جب طہ}$ اور $\text{ت}_\text{ب} = \frac{\text{آ سے}}{\text{جم طہ}}$

کیونکہ آ سے طناب کا افقی تناؤ ہے۔

$$\therefore\ \text{ت}_\text{ب} \times \text{ث}_۱ = \frac{\text{آ سے}\ \text{ل}_۱\ \text{جب طہ}}{\text{جم طہ}} = \text{آ سے}\ \text{ل}_۱\ \text{مس طہ}$$

$$\therefore\ \text{آ سے}\ \text{ل}_۱\ \text{مس طہ} = \text{س}_۱\,\text{ا}_۱ - \frac{\text{م}_\text{ا}\,\text{ل}_۱^۲}{۶} - \frac{۲\,\text{م}_\text{ب}\,\text{ل}_۱^۲}{۶}$$

$$\therefore\ \text{آ سے مس طہ} = \frac{\text{س}_۱\,\text{ا}_۱}{\text{ل}_۱} - \frac{\text{م}_\text{ا}\,\text{ل}_۱}{۶} - \frac{۲\,\text{م}_\text{ب}\,\text{ل}_۱}{۶} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اب دوسرے فصل پر غور کرو۔ چونکہ طہ دونوں فصلوں کے لیے ایک ہی ہے اور آ سے مستقل ہے، اس لیے

$$\text{آ سے مس طہ} = -\left(\frac{\text{س}_۲\,\text{ا}_۲}{\text{ل}_۲} - \frac{\text{م}_\text{ج}\,\text{ل}_۲}{۶} - \frac{۲\,\text{م}_\text{ب}\,\text{ل}_۲}{۶}\right) \quad \ldots\ldots (۳)$$

منفی علامت اس لیے لگائی گئی کہ معیار مخالف سمت میں لیے گئے۔
مساواتوں (۲) اور (۳) کو ملانے سے

$$\frac{\text{س}_۱\,\text{ا}_۱}{\text{ل}_۱} - \frac{\text{م}_\text{ا}\,\text{ل}_۱}{۶} - \frac{۲\,\text{م}_\text{ب}\,\text{ل}_۱}{۶} = -\left(\frac{\text{س}_۲\,\text{ا}_۲}{\text{ل}_۲} - \frac{\text{م}_\text{ج}\,\text{ل}_۲}{۶} - \frac{۲\,\text{م}_\text{ب}\,\text{ل}_۲}{۶}\right)$$

یا

$$\text{م}_\text{ا}\,\text{ل}_۱ + ۲\,\text{م}_\text{ب}(\text{ل}_۱ + \text{ل}_۲) + \text{م}_\text{ج}\,\text{ل}_۲ = ۶\left(\frac{\text{س}_۱\,\text{ا}_۱}{\text{ل}_۱} + \frac{\text{س}_۲\,\text{ا}_۲}{\text{ل}_۲}\right) \quad \ldots\ldots (۴)$$

یہ وہ عام ضابطہ ہے جو ہر قسم کے لداؤ کے لیے صحیح ہے۔
اگر لداؤ ہر ایک فصل پر یکساں ہو لیکن مختلف حدتوں $\text{ب}_۱$ اور $\text{ب}_۲$ کا ہو تو

$$\text{س}_۱ = \frac{۲}{۳}\,\text{ل}_۱ \times \frac{\text{ب}_۱\,\text{ل}_۱^۲}{۸} = \frac{\text{ب}_۱\,\text{ل}_۱^۳}{۱۲}$$

$$\text{ا}_۱ = \frac{\text{ل}_۱}{۲}$$

اسی طرح $س_2 = \frac{ب_2 ل_2^3}{12}$

$$\bar{ا}_2 = \frac{ل_2}{2}$$

$$\therefore \frac{س_1 \bar{ا}_1}{ل_1} + \frac{س_2 \bar{ا}_2}{ل_2} = \frac{1}{24}\left(ب_1 ل_1^3 + ب_2 ل_2^3\right)$$

∴ اِس صورت کے لیے

$$م_ا ل_1 + 2 م_ب \left(ل_1 + ل_2\right) + م_ج ل_2 = \frac{1}{4}\left(ب_1 ل_1^3 + ب_2 ل_2^3\right) \quad \ldots\ldots(5)$$

اگر دونوں فصلوں پر بوجھ کی حدت مساوی ہو تو

$$م_ا ل_1 + 2 م_ب \left(ل_1 + ل_2\right) + م_ج ل_2 = \frac{ب}{4}\left(ل_1^3 + ل_2^3\right) \quad \ldots\ldots(6)$$

ردِّ عمل اور جزر کے نقشے ـــــ ثابت شہتیروں کی طرح

مسلسل شہتیروں کے جزر کے نقشوں کے اساسی خط بھی خماؤ کے معیار کے منحنی کے ڈھال کی تبدیلی کی وجہ سے ہٹ جائینگے۔

کسی سہارے مثلاً ب پر غور کرو اور فرض کرو کہ ب پر فصل $ل_1$ کی وجہ سے آزادانہ سہارے ہوئے فصلوں کی صورت میں ردِّ عمل $ر_1$ ہوتا اور مسلسل شہتیر کی صورت میں $ر'_1$ ہوتا ہے۔

تب خماؤ کے معیار کے منحنی کے ڈھال کی تبدیلی $= \frac{م_ب - م_ا}{ل_1}$

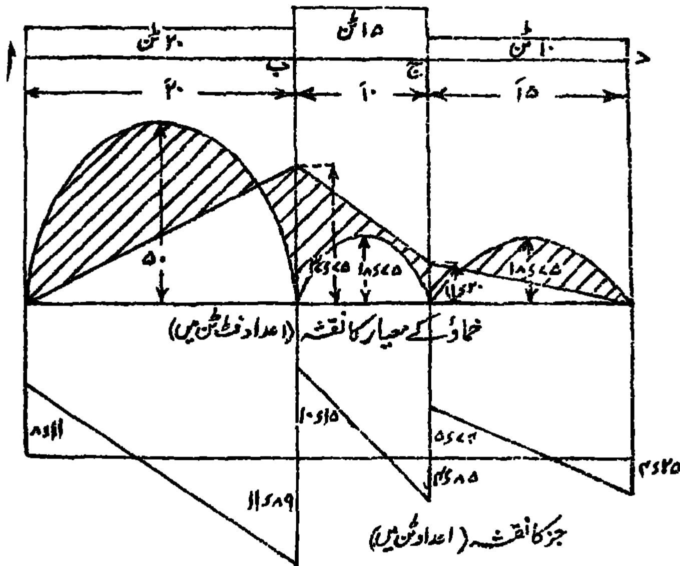
$$\therefore ر'_1 = ر_1 + \frac{م_ب - م_ا}{ل_1}$$

اسی طرح اگر فصل $ل_2$ کی وجہ سے مقداریں $ر_2$ اور $ر'_2$ ہوں تو

$$ر'_{۲} = ر_{۲} + \frac{م_{ب} - م_{ج}}{ل_{۲}}$$

$$\therefore \text{ ب پر مجموعی ردِّ عمل } = ر_{ب} = ر'_{۱} + ر'_{۲} = ر_{۱} + ر_{۲} + \frac{م_{ب} - م_{۱}}{ل_{۱}} + \frac{م_{ب} - م_{ج}}{ل_{۲}}$$

تب $ر'_{۱}$ اور $ر'_{۲}$ سے ب کے دونوں طرف جز کے نقشوں کے معین حاصل ہونگے۔ یہ ذیل کی عددی مثال سے اور زیادہ واضح ہو جائیگا۔



شکل ۱۰۵۔ تین فصل کا مسلسل شہتیر

ایک مسلسل گرڈر اب ج د (شکل ۱۰۵) تین فصلوں پر مشتمل ہے جن کے طول ۲۰، ۱۰، ۱۵ فٹ ہیں۔ پہلے فصل پر ۲۰ ٹن، دوسرے پر ۱۵ ٹن،

اور بقیہ سے پر ۱۰ ٹن کا بوجھ یکساں پھیلا ہوا ہے۔ خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے کھینچو۔

پہلے خماؤ کے معیار کے نقشے یہ سمجھ کر کھینچو کہ تینوں فصل علٰحدہ علٰحدہ آزادانہ سہارے ہوئے ہیں۔

اب پہلے دو فصلوں کو لو تو تین معیاروں کے مسئلے کی رُو سے

$$م_{ا} \times ۲۰ + ۲م_{ب} \times ۳۰ + م_{ج} \times ۱۰ = \frac{۱}{۴}\left\{۲۰^{۳} \times \frac{۲۰}{۲۰} + ۱۰^{۳} \times \frac{۱۵}{۱۰}\right\}$$

لیکن سرا ا آزادانہ سہارا ہوا ہے $\therefore م_{ا} = ۰$

$$\therefore ۶۰م_{ب} + ۱۰م_{ج} = \frac{۱۰^{۳}}{۴}\left(۸ + \frac{۱۵}{۱۰}\right)$$

$$یا \quad ۶م_{ب} + م_{ج} = ۲۳۷٫۵ \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب دوسرے اور تیسرے فصل پر غور کرو تو

$$م_{ب} \times ۱۰ + ۲م_{ج} \times ۲۵ + م_{د} \times ۱۵ = \frac{۱}{۴}\left\{۱۰^{۳} \times \frac{۱۵}{۱۰} + ۱۵^{۳} \times \frac{۱۰}{۱۵}\right\}$$

سرا د آزادانہ سہارا ہوا ہے، اِس لیے $م_{د} = ۰$

$$\therefore ۱۰م_{ب} + ۵۰م_{ج} = \frac{۵^{۳}}{۴}\left\{۱۸ + ۱۲\right\}$$

$$یا \quad م_{ب} + ۵م_{ج} = ۹۳٫۷۵ \ldots\ldots\ldots (۲)$$

ہمزاد مساواتوں (۱) اور (۲) کو حل کرنے سے

$$م_{ب} = ۳۷٫۷۵$$

$$م_{ج} = ۱۱٫۲$$

$\therefore$ اِن قیمتوں کو قائم کرنے سے خماؤ کے معیار کا وہ نقشہ حاصل ہوتا ہے جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔

جز کا نقشہ حاصل کرنے کے لیے پہلے ردِ عملوں کا حساب یہ ہوگا:۔

$$\text{ر}_{\text{ا}} = \frac{\text{ب ل}_{۱}}{۲} + \frac{\text{م}_{۱} - \text{م}_{\text{ب}}}{\text{ل}_{۱}} = \frac{۲۰}{۲} - \frac{۳۷٫۷۵}{۲۰} = ۸٫۱۱ \text{ ٹن}$$

$$\text{ر}_{\text{ب}} = \frac{۲۰}{۲} + \frac{۳۷٫۷۵}{۲۰} + \frac{۱۵}{۲} + \frac{۲۶٫۵۵}{۱۰} = ۱۱٫۸۹ + ۱۰٫۱۵ = ۲۲٫۰۴ \text{ ٹن}$$

$$\text{ر}_{\text{ج}} = \frac{۱۵}{۲} - \frac{۲۶٫۵۵}{۱۰} + \frac{۱۰}{۲} + \frac{۱۱٫۲۰}{۱۵} = ۴٫۸۵ + ۵٫۷۴ = ۱۰٫۵۹ \text{ ٹن}$$

$$\text{ر}_{\text{د}} = \frac{۱۰}{۲} - \frac{۱۱٫۲۰}{۱۵} = ۴٫۲۶ \text{ ٹن}$$

حاصل جمع ۴۵ ٹن

اس سے جز کا وہ نقشہ حاصل ہوگا جو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ شہتیر کے مسلسل ہونے سے صرف اساسی خط بدلینگے۔ منحنیوں کی شکل نہیں بدلیگی۔

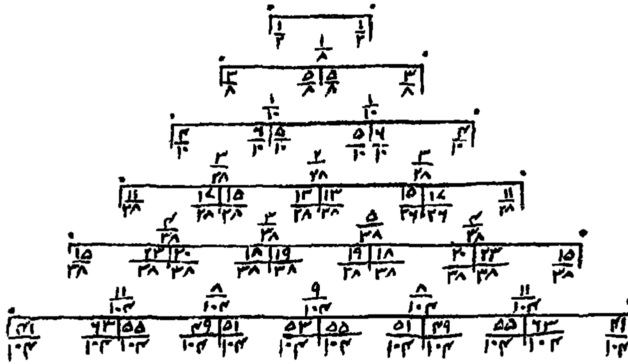
اگر فصل تین سے زیادہ ہوں تو دو دو متصل فصل لیے جائینگے اور تین معیاروں کے مسئلے سے مساواتوں کا ایک سلسلہ حاصل ہوگا۔

مزید عددی مثالیں اس باب کے آخر میں ملینگی۔

ثابت سروں کے مسلسل شہتیر۔۔۔ اگر ایک مسلسل شہتیر کا ایک سرا ثابت ہو تو سرے کے خماؤ کا معیار اس طرح حاصل ہوگا کہ اس ثابت سرے کے دوسری جانب اس شہتیر کو مسلسل تصور کیا جائے اور فرض کیا جائے کہ دوسری جانب کا حصہ ہر لحاظ سے بالکل اصلی حصے کی طرح ہے۔ کیونکہ سرے کو ثابت کرنے سے شہتیر اس مقام پر افقی ہو جاتا ہے، اور افقی وضع ایک متشاکل مسلسل شہتیر کے وسط میں واقع ہوتی ہے۔ اس کی ایک مثال اس باب کے آخر میں حل کی ہوئی مثالوں میں ملیگی۔

مساوی فصل، اور ان پر مستقل یکساں بوجھ۔۔۔ عملاً فصل (ل) عموماً مساوی ہوتے ہیں اور یکساں بوجھ (ب) فی طولی فٹ مستقل ہوتا ہے اور انتہائی سرے

انزاوانہ سہارے ہوئے ہوتے ہیں۔ شکل ۱۰۶ میں ایک نقشہ دکھایا گیا ہے جس سے سہاروں کے معیار اور ردِّ عمل چھ فصل تک کے شہتیر کے لیے معلوم ہو سکتے ہیں۔



شکل ۱۰۶۔ مساوی فصلوں کے یکساں لدے ہوئے مسلسل شہتیروں کے خ۔م اور ردِّ عمل

فصل کے خطوط کے اوپر جو اعداد ہیں وہ سہاروں کے معیاروں کے عددی سر ہیں جن کو ب ل۲ سے ضرب دینا چاہیے۔
فصل کے خطوط کے نیچے ردِّ عملوں کے عددی سر ہیں جن کو ب ل سے ضرب دینا چاہیے۔
اِن سے خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے آسانی سے کھینچے جا سکتے ہیں۔
طالب علم تین معیاروں کے مسئلے کے ذریعے اس نقشے کی تصدیق کر لیں۔

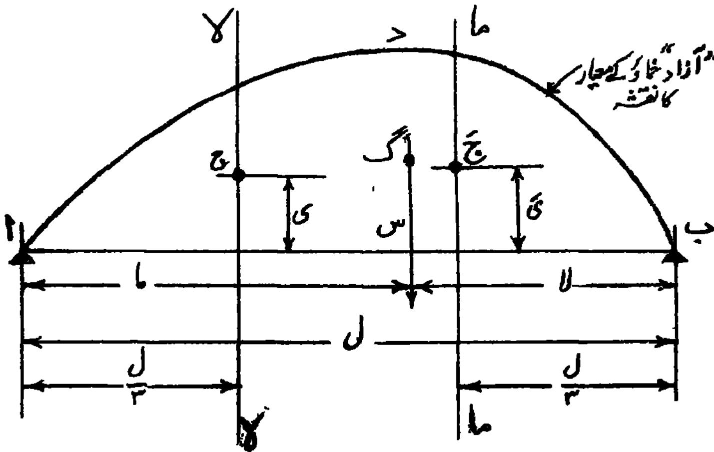
ثابت اور مسلسل شہتیروں کے خصوصی نقاط

یہ طریقۂ حل جس کو "خصوصی نقاط" کا طریقہ کہا جاتا ہے پہلے پروفیسر کلیکسٹن فِڈلر (T. Claxton Fidler) نے ۱۸۸۳ء میں پیش کیا۔
اِس کی طرف طلبہ نے کما حقہ توجہ نہیں کی اور اس کی وجہ یہ ہے کہ اکثر

درسی کتابوں میں اس کو شامل نہیں رکھا گیا ہے لیکن حال میں ڈاکٹر سامن (Dr. Salmon) نے انسٹی ٹیوشن آف سول انجینیرز کے سامنے جو ایک پرچہ "خصوصی نقاط" کے عنوان سے پیش کیا تو اِس مضمون میں نئے سرے سے دلچسپی لی جانے لگی۔ اِس پرچے میں ڈاکٹر سامن نے اس مضمون سے بہت تفصیل کے ساتھ بحث کی ہے اور دکھایا ہے کہ اِس طریقے میں فِلڈ لمہ کی دکھائی ہوئی وسعت سے زیادہ توسیع کی جا سکتی ہے۔

یہاں ہم اِس طریقہ کو ممکنہ طور پر آسان پیرائے میں بیان کرینگے تاکہ اُن طلبہ کے لیے ایک تمہید کا کام دے جو اس مضمون کا مزید مطالعہ کرنا چاہیں۔

خصوصی نقطہ کیا ہے؟ فرض کرو کہ ا د ب (شکل ۱۰۶ا) فصل ل کے ایک شہتیر ا ب پر "آزاد" خماؤ کے معیار کے نقشے کو تعبیر کرتا ہے۔



شکل ۱۰۶ا

"آزاد" خماؤ کے معیار کے نقشے سے مراد وہ نقشہ ہے جو دیے ہوئے لداؤ کے تحت اِس شہتیر پر آزاد سروں کی صورت میں بنتا۔ دونوں سروں سے ل/۳ کے فاصلے پر انتصابی خطوط لا لا اور ما ما کھینچو۔ اِن خطوط کو

"تہائی خطوط" کہا جائیگا۔

اب فرض کرو کہ آزاد نقشے ا د ب کا رقبہ س ہے، اور اس کا مرکزِ ہندسی گ سروں ا اور ب سے فاصلوں ما اور لا پر ہے۔

تہائی خطوط پر اساسی خط ا ب سے ایسے فاصلوں ی اور یَ پر نقاط ج اور جَ لو کہ

$$ی = \frac{۲ س \times لا}{ل^۲} \qquad (۷)$$

$$یَ = \frac{۲ س \times ما}{ل^۲} \qquad (ما)$$

تو نقاط ج اور جَ "خصوصی نقطے" ہونگے۔

خاص صورتوں میں خصوصی نقطوں کا محل

(۱) یکساں بوجھ و ــــــ اس صورت میں آزاد نقشہ ایک مکافی ہوگا جس کا ارتفاع = $\frac{و ل}{۸}$، مکافی کا رقبہ س = $\frac{۲}{۳}$ ل × $\frac{و ل}{۸}$ = $\frac{و ل^۲}{۱۲}$، اور فاصلے ما اور لا دونوں $\frac{ل}{۲}$ ہونگے۔

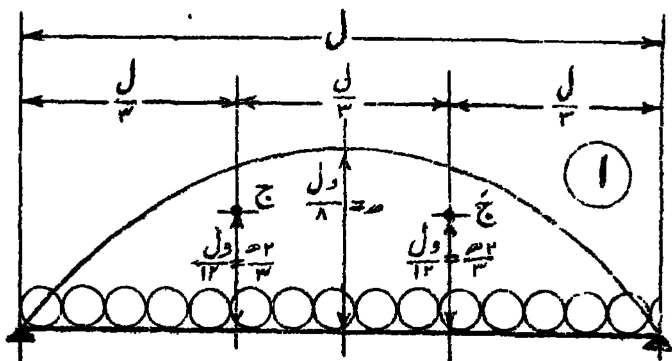
$$\therefore ی = یَ = ۲ \times \frac{و ل^۲}{۱۲} \times \frac{ل}{۲ ل^۲} = \frac{و ل}{۱۲}$$

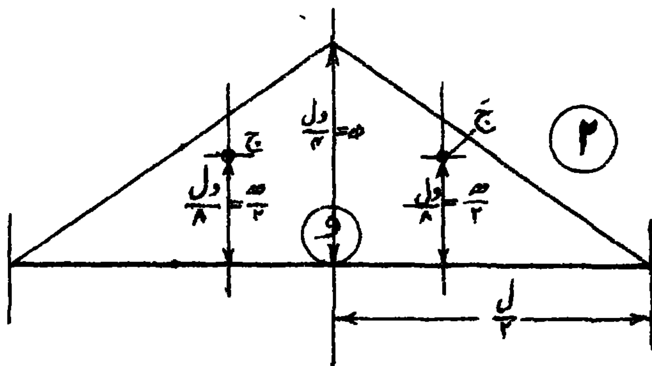
$$= \frac{۲}{۳} \times \text{آزاد نقشے کا ارتفاع}$$

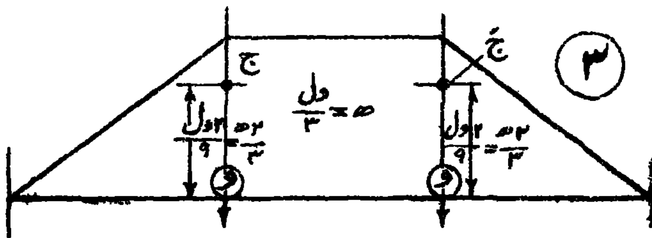
(۲) مرکزی بوجھ = و ــــــ اس صورت میں آزاد نقشہ ایک مثلث ہوگا جس کا ارتفاع = $\frac{و ل}{۴}$، اور اس کا رقبہ = $\frac{ل}{۲} \times \frac{و ل}{۴}$ = $\frac{و ل^۲}{۸}$، اور ما اور لا دونوں = $\frac{ل}{۲}$

$$\therefore ی = یَ = ۲ \times \frac{و ل^۲}{۸} \times \frac{ل}{۲ ل^۲} = \frac{و ل}{۸}$$

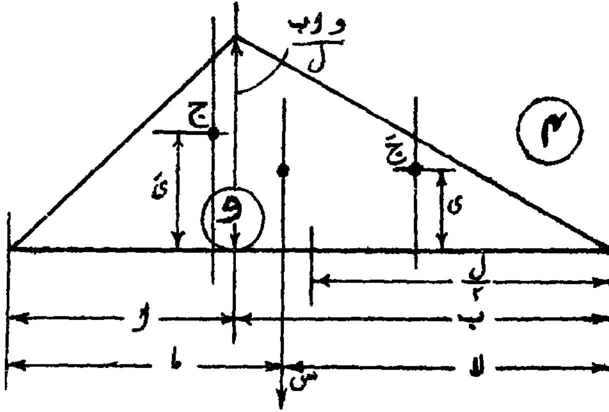
$$= \frac{۱}{۲} \times \text{آزاد نقشے کا ارتفاع}$$







شکل ۱۰۶ ب



شکل ۱۰۶ ب

(۳) دو بوجھ و تہائی نقطوں پر ـــــ اس صورت میں آزاد نقشہ شکل ۱۰۶ ب (۳) کے مطابق ہوگا۔

نقشے کا ارتفاع = $\frac{\text{ول}}{۳}$ اور اس کا رقبہ

$$\text{س} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\text{ل}}{۳} \times \frac{\text{ول}}{۳} + \frac{\text{ول}}{۳} \times \frac{\text{ل}}{۳} + \frac{۱}{۲} \times \frac{\text{ل}}{۳} \times \frac{\text{ول}}{۳}$$

$$= \frac{۲\,\text{و}\,\text{ل}^{۲}}{۹}$$

ما اور لا دونوں = $\frac{\text{ل}}{۲}$

$$\therefore \text{ی} = \text{یٰ} = ۲ \times \frac{۲\,\text{و}\,\text{ل}^{۲}}{۹} \times \frac{\text{ل}}{۲\,\text{ل}^{۲}} = \frac{۲\,\text{ول}}{۹}$$

= $\frac{۲}{۳}$ × آزاد نقشے کا ارتفاع

(۴) غیر مرکزی بوجھ و ـــــ اس صورت میں آزاد نقشہ (شکل ۱۰۶ ب (۴)) ایک مثلث ہوگا جس کا ارتفاع = $\frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}}$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ل}}{۲} \times \frac{\text{و ا ب}}{\text{ل}} = \frac{\text{و ا ب}}{۲}$$

$$\text{ا} = \frac{\text{ل}}{۲} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{\text{ل}}{۲} - \text{ب}\right) = \frac{۲\text{ل}}{۳} - \frac{\text{ب}}{۳} = \frac{۲\text{ا} + ۲\text{ب} - \text{ب}}{۳}$$

$$= \frac{۲\text{ا} \times \text{ب}}{۳} = \frac{\text{ا} + \text{ا} + \text{ب}}{۳} = \frac{\text{ل} + \text{ا}}{۳}$$

اسی طرح $\text{لا} = \frac{\text{ل} + \text{ب}}{۳}$

$$\therefore \text{ی} = \frac{\text{و ا ب}\,(\text{ل} + \text{ا})}{۳\,\text{ل}^{۲}}$$

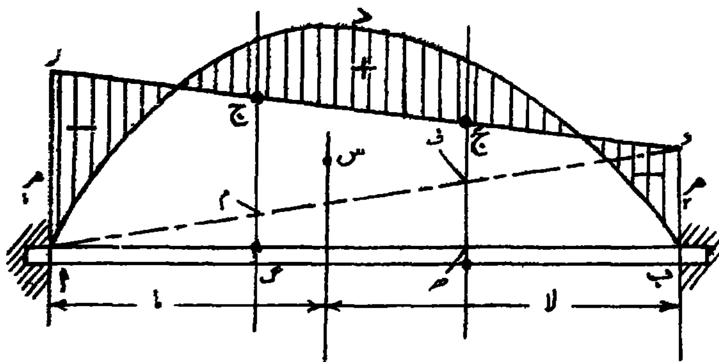
$$\text{یَ} = \frac{\text{و ا ب}\,(\text{ل} + \text{ب})}{۳\,\text{ل}^{۲}}$$

اِن ضابطوں سے خصوصی نقاط ج، جَ حاصل ہونگے۔

اس کا اطلاق ثابت شہتیروں پر — مور (Mohr) کے مسئلے میں ذرا ترمیم کرکے یہ اصول قایم کیا جاسکتا ہے کہ اگر کسی شہتیر پر کے خماؤ کے معیار کے نقشے کو ایک خیالی بوجھ کا نقشہ سمجھا جائے تو حاصل ہونے والی خیالی جزی قوت (× آ ے) سے کسی نقطے پر شہتیر کا ڈھال حاصل ہوگا۔ اِس اصول کی رُو سے ثابت شہتیر میں دونوں سروں پر خیالی ردِّ عمل صفر ہونا چاہیے کیونکہ دونوں سروں پر ڈھال صفر ہے۔

شکل ۱۰۶ ج میں ایک ثابت شہتیر دکھایا گیا ہے جس پر کے بوجھ سے آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر پر خماؤ کے معیار کا نقشہ ا د ب (+) پیدا ہوتا۔ سروں کی تثبیت سے منفی یا معکوس معیار م۱ اور م۲ پیدا ہوتے ہیں جن سے منفی خماؤ کے معیار کا نقشہ ا ر و ب پیدا ہوتا ہے۔ کسی نقطے پر حقیقی خماؤ کا معیار دونوں نقشوں کے فرق سے حاصل ہوگا جس کو سایہ دار دکھایا گیا ہے۔

اب ہم ثابت کرینگے کہ خط ر د دونوں خصوصی نقطوں ج اور جَ میں سے گزرتا ہے۔



شکل ۱۰۶ ج

اس کے لیے خط ا د کھینچو جس سے معکوس نقشہ دو مثلثوں ا ر د اور ا د ب میں بٹ جائیگا جن کے مرکز ہندسی تہائی خطوط پر واقع ہونگے۔
سرے ا پر خیالی جز ق_1 معلوم کرنے کے لیے نقطہ ب کے گرد معیار لو۔ اس سے

$$\text{ق}_1 \times \text{ا} = \text{س} \times \text{لا} - \triangle\,\text{ا ر د کا رقبہ} \times \frac{\text{۲ل}}{\text{۳}}$$

$$- \triangle\,\text{ا د ب کا رقبہ} \times \frac{\text{ل}}{\text{۳}}$$

$$= \text{س} \times \text{لا} - \frac{\text{م}_1 \times \text{ل}}{\text{۲}} \times \frac{\text{۲ل}}{\text{۳}} - \frac{\text{م}_2 \times \text{ل}}{\text{۲}} \times \frac{\text{ل}}{\text{۳}}$$

$$= \text{س} \times \text{لا} - \frac{(\text{۲م}_1 + \text{م}_2)\,\text{ل}^2}{\text{۶}} \quad \cdots\cdots (\text{۱})$$

چونکہ ق_1 صفر ہے اس لیے

$$(\text{۲م}_1 + \text{م}_2) = \frac{\text{۶س لا}}{\text{ل}^2} \quad \cdots\cdots (\text{۲})$$

اِسی طرح ا کے گرد معیار لینے سے یہ حاصل ہوگا:۔

$$(م_۱ + ۲ م_۲) = \frac{۶ س ما}{ل^۲} \quad .... (۳)$$

اب گ ج = گ م + م ج

$$= \frac{م_۲}{۳} + \frac{۲ م_۱}{۳}$$

$$= \frac{۱}{۳} (۲ م_۱ + م_۲)$$

$$= \frac{۱}{۳} \frac{۶ س \times لا}{ل^۲}$$ مساوات (۲) سے

$$= \frac{۲ س \times لا}{ل^۲}$$

اور ربط (۷) سے یہی خصوصی نقطہ ج کی بلندی ی ہے۔

اِسی طرح حاصل ہوگا کہ

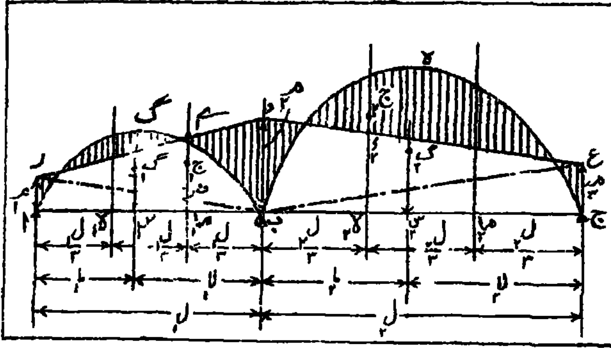
$$ل جَ = \frac{۲ س \times ما}{ل^۲} = یَ$$

اطلاق مسلسل شہتیروں پر ــــ فرض کرو کہ ا، ب، ج تین متصل سہارے ایک مسلسل شہتیر کے ہیں جس پر آزاد خماؤ کے معیار کے نقشے ا گ ب اور ب ہ ج ہیں۔

فرض کرو کہ فصل $ل_۱$، $ل_۲$ ہیں اور آزاد نقشوں کے رقبے $س_۱$، $س_۲$ ہیں اور اِن کے مرکزِ ہندسی $گ_۱$، $گ_۲$ ہیں۔

شہتیر کے تسلسل کا یہ اثر ہوگا کہ سہاروں پر معکوس معیار $م_۱$، $م_۲$، $م_۳$ عمل کرینگے اور مسلسل شہتیروں کی بحث میں ساری دِقت اِن ہی معکوس معیاروں کو

معلوم کرنے کی ہے۔ جوں ہی کہ یہ معلوم ہو جائیں خطوط ر د اور د ع کھینچے جا سکتے ہیں



شکل ۱۰۶ د

جن سے خماؤ کے معیار کا مکمل نقشہ حاصل ہوگا جو کہ سایہ دار دکھایا گیا ہے۔ مسلسل شہتیر میں ضروری شرط یہ ہے کہ کسی سہارے پر شہتیر کا ڈھال وہی حاصل ہونا چاہیے خواہ وہ ایک فصل کے ختم کے لیے محسوب کیا جائے یا دوسرے فصل کے شروع کے لیے۔

اب سہارے ب پر خیالی جز ق_2 محسوب کرو۔ یہ اس نقطے پر کے ڈھال کے تناسب ہوگا جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں۔

پہلے فصل اب کو لے کر ا کے گرد معیار لو۔ اس سے

$$\text{س}_2 \times \text{ل}_1 = \text{س}_1\text{ما}_1 - \triangle\ \text{ا ر ب کا معیار} - \triangle\ \text{ر د ب کا معیار}$$

$$= \text{س}_1\text{ما}_1 - \frac{\text{م}_1\text{ل}_1}{2} \times \frac{\text{ل}_1}{3} - \frac{\text{م}_2\text{ل}_1}{2} \times \frac{2\text{ل}_1}{3}$$

$$\therefore \text{ق}_2 = \frac{\text{س}_1\text{ما}_1}{\text{ل}_1} - \frac{(\text{م}_1 \times 2\text{م}_2)}{3}\,\frac{\text{ل}_1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

اب اگر تہائی خط ما_1 سے پر خصوصی نقطہ ج_1 ہو تو ربط (ما) سے

$$\text{ما}_1\text{ج}_1 = \frac{2\,\text{س}_1\text{ما}_1}{\text{ل}_1}$$

یا $$\frac{\text{س}_1}{\text{ل}_1} = \frac{\text{ما ج}_1}{2} \times \text{ل}_1$$

اور $$\text{ما}\,\text{ے}_1 = \frac{\text{م}}{2}\,\text{ما ف} + \text{ف ے م}$$

$$= \frac{\text{م}}{2} + \frac{\text{م}^2}{2}$$

اِس لیے اِن نتائج کو (۴) میں درج کرنے سے

$$\text{س}_1 = \frac{\text{ما ج}_1}{2} \times \text{ل}_1 - \frac{\text{ما ے}_1 \times \text{ل}_1}{2}$$

$$= -\frac{\text{ج}_1\,\text{ے}}{2} \times \text{ل}_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

اب اگر فصل ب ج پر غور کیا جائے اور نقطہ ج کے گرد معیار لیے جائیں تو اسی طرح کے استدلال سے جس کی طلبہ تصدیق کریں یہ حاصل ہوگا :-

$$\text{س}_1 = \frac{\text{ج}_2\,\text{ک}_2}{2} \times \text{ل}_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

علامتیں اس لیے معکوس کر دی گئی ہیں کہ معیاروں کی سمت معکوس کر دی گئی ہے۔
چونکہ یہ خیالی جز نقطہ ب پر کے ڈھال کو دونوں طرف کے فصلوں کے لحاظ سے تعبیر کرتے ہیں اس لیے مساوی ہونے چاہییں۔ اِس طرح

$$-\text{ج}_1\,\text{ے}_1 \times \text{ل}_1 = \text{ج}_2\,\text{ک}_2 \times \text{ل}_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی سہارے کے دونوں بازوؤں کے خصوصی نقطے معکوس خماؤ کے معیار کے خطوط ر د اور د ع کی مخالف جانبوں میں ہونگے (یعنی ایک اوپر ہوگا تو دوسرا نیچے) اور اوپر اور نیچے ان کے فاصلے فصلوں کے معکوس تناسب میں ہونگے۔

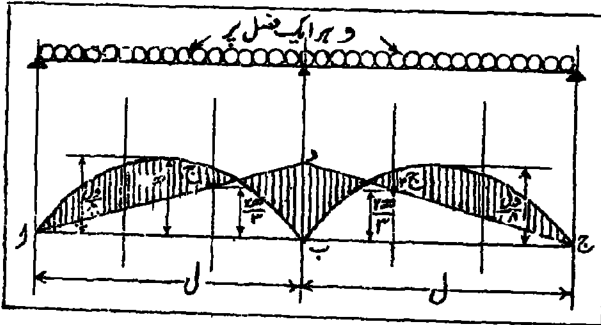
اگر دونوں متصل فصل مساوی ہوں تو یہ حاصل ہوتا ہے کہ فاصلے ج ۱ ے ۱ اور ج ۲ ک ۲ مساوی ہونگے۔ اوپر کی بحث کسی قدر پیچیدہ معلوم ہوگی

لیکن اس طریقے کا عملاً استعمال بہت آسان ہے یہاں تک کہ پیچیدہ صورتیں بھی نقشہ کشی کے تختے پر چند آزمائشی خطوط کی مدد سے چند منٹوں میں حل کر لی جا سکتی ہیں۔ اس کے برخلاف معمولی طریقوں سے حل کرنے میں بہت دیر لگتی ہے۔

خصوصی نقطے کے طریقے سے غلطی زیادہ نہیں ہو سکتی خاص کر جب اس امر کو مدِنظر رکھا جائے کہ مسلسل شہتیر کے نظریے میں جو مفروضات اختیار کیے گئے وہ ایسے ہیں کہ بہت زیادہ صحت کی کوشش کرنا بے سود ہے۔

مثالیں

(۱) دو مساوی فصل مساوی طور پر لدے ہوئے (شکل ۱۰۶ع)۔
یہ سادہ ترین صورت ہے جو ممکن ہے۔



شکل ۱۰۶ع

سرے ا اور ج سادہ طور پر سہارے ہوئے ہیں اس لیے ان نقاط پر معکوس خماؤ کے معیار صفر ہوں گے اور معکوس خماؤ کے معیار کے خط ا د ج کو خصوصی نقطہ ج کے اتنا اوپر سے گزرنا چاہیے جتنا خصوصی نقطہ ج کے نیچے سے گزرتا ہے۔

یہ اسی طرح ممکن ہے کہ معکوس خماؤ کے معیار کا خط خصوصی نقطوں میں سے گزرے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

(۲) ایک مسلسل شہتیر کے دو فصل ہیں ۴۰ فٹ اور ۲۰ فٹ اور

دونوں کے مرکزوں پر ۱۰ ٹن کا ایک بوجھ ہے۔

دیکھو شکل ۱۰۶ ف۔ پہلے آزاد خماؤ کے معیار کے نقشے کھینچو جو مثلث وک ب اور ب ھ ج ہونگے۔ پہلے کا ارتفاع

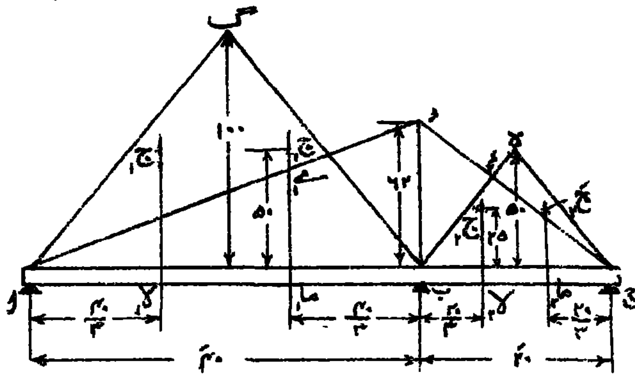
$$\frac{۴۰ \times ۱۰}{۴} = ۱۰۰ \text{ فٹ ٹن}$$

اور دوسرے کا

$$\frac{۱۰ \times ۲۰}{۴} = ۵۰ \text{ فٹ ٹن}$$

ہوگا۔

جیساکہ شکل ۱۰۶ ب (۲) میں دکھایا گیا ہے مرکزی بوجھ کے شہتیر کے لیے خصوصی نقاط کی بلندی $\frac{ف ل}{۸}$، یعنی آزاد خماؤ کے معیار کے مثلث کے ارتفاع کا نصف ہوگی۔



شکل ۱۰۶ ف

اس لیے خصوصی نقاط ج۱، جَ۱ کو ۵۰ فٹ ٹن کی بلندی پر اور ج۲، جَ۲ کو ۲۵ فٹ ٹن کی بلندی پر قائم کرو۔

چونکہ فصل و ب فصل ب ج کا دگنا ہے اس لیے فاصلہ ج۲ ع۲ فاصلہ جَ۲ ع۲ کا دگنا ہونا چاہیے۔

اب چونکہ یہ معلوم ہے کہ سہاروں کے معیار کا نقشہ ا اور ج میں سے گزرنا چاہیے اس لیے آزمایش کے طور پر ا اور ج کو ایک ایسے نقطہ د سے ملاؤ کہ یہ خط ما میں سے تہائی خط کو ج سے اُس فاصلے کے نصف کے بقدر اوپر یا نیچے قطع کرے جس کے بقدر کا تہائی خط کو ج کے نیچے یا اوپر قطع کرے۔

آزمایش کے ذریعے آخر نقطہ د حاصل ہوگا جس سے سہارے کا معیار ۲ ٹن فٹ حاصل ہوتا ہے۔

اِس طریقے کا بڑا فائدہ یہ ہے کہ اس سے حاصل ہونے والے نتائج عملی اغراض کے لیے کافی صحیح ہوتے ہیں اور عمل ہندسی شکل میں آنکھوں کے سامنے رہتا ہے جس کی وجہ سے غلطی بہت زیادہ نہیں ہوسکتی۔

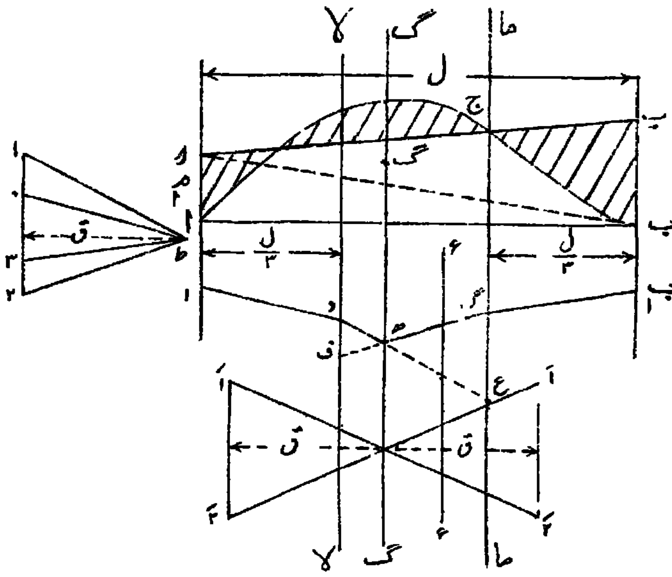
طلبہ سے سفارش کی جاتی ہے کہ اس طریقے کو اُن مثالوں پر آزمائیں جو تین معیاروں کے طریقے سے حل کی گئی ہیں۔

مسلسل شہتیروں کی ترسیمی بحث

فصل بہت سے ہوں اور لداؤ بے قاعدہ ہو تو تین معیاروں کے مسئلے کا استعمال کسی قدر دقت طلب ہوجاتا ہے۔ ذیل میں ایک ترسیمی طریقہ دیا جاتا ہے جو کسی قدر پیچیدہ ہے اور اس کو سمجھانے میں دقت صرف ہوتا ہے لیکن دلچسپی سے خالی نہیں اور کارآمد ہے اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ترسیمی بحث کو کس حد تک کام میں لایا جاسکتا ہے۔

مور (Mohr) کے مسئلے کی خیالی طناب پر غور کرو جو شہتیر کے لچک کے خط کو تعبیر کرتی ہے۔ یہ ایک رسیمانی کثیر الاضلاع ہے جو خماؤ کے معیار کے نقشے کو لداؤ سمجھ کر اور قطبی فاصلہ آ × سے لے کر کھینچا جائے۔

کسی رسیمانی کثیر الاضلاع کے پہلے اور آخری ضلع کا ڈھال اور محل قوتوں کی تقسیم پر بالکل منحصر نہیں ہوتے بشرطیکہ ان تمام تقسیموں میں حاصل کی مقدار اور سمت وہی رہے۔



شکل ۱۰۱۔ مسلسل شہتیر۔ ترسیمی عمل

یہ بات باب ۳ کی شکل پر موجودہ ساخت کے سلسلے میں غور کرنے سے واضح ہو جائیگی۔

جیسا کہ آگے چل کر دکھایا جائیگا اگر سہاروں پر لچک کے خط کے مماس معلوم ہو جائیں تو سہاروں پر کے معیار معلوم ہو جائینگے۔ فرض کرو کہ ا ب (شکل ۱۰۱) ایک مسلسل شہتیر کے ایک فصل کو تعبیر کرتا ہے جس کا طول ل ہے اور فرض کرو کہ اس پر کے لداؤ کے آزاد خماؤ کے معیار کا نقشہ ا ج ب ہے اور ا د اور ب ب سہاروں کے معیاروں مٓ اور مٓ کو تعبیر کرتے ہیں۔ اگر نقشے ا ج ب کا مرکزِ ہندسی گ ہو تو انتصابی خط گ گ کو مرکزِ ہندسی کا انتصابی خط کہا جاتا ہے، اور اگر سہاروں کے معیاروں کے نقشے کو دو مثلثوں ا د ب اور ب د ب میں تقسیم کیا جائے تو ان مثلثوں کے رقبے دائیں اور بائیں ثلث کے خطوط لا لا اور ما ما میں عمل کرینگے۔ اب لچک کا خط

معلوم کرنے کے لیے خماؤ کے معیار کے حقیقی منحنی کو منفرد قوتوں میں بدل دو جو

شکل ۱۰۰۰۱۔ مسلسل شہتیر۔ ثابت نقطے

خطوط گ گ، لا لا، ما ما میں اوپر یا نیچے کو عمل کریں۔

ایک سمتی خط بر حسب ذیل قایم کرو:۔

۱، ۲ = آزاد خماؤ کے معیار کے نقشے ا ج ب کا رقبہ = س

۰، ۱ = مثلث ا ر ب کا رقبہ = س۱

۲، ۳ = " ر ب ج " = س۲

پھر اگر قطبی فاصلہ ق = م سے پر قطب ط لے کر (۰، ط) کے متوازی ا د، (۱، ط) کے متوازی د ھ، (۲، ط) کے متوازی ھ گ، اور (۳، ط) کے متوازی گ ب کھینچا جائے تو د ھ اور ھ گ وسطی ضلع کہلاتے ہیں۔

اور ا، د اور گ ج ب سہاروں پر کے مماس ہونگے۔

اب ہمارے مسئلے میں ہم کو نقاط ۰ اور ۳ کے محل معلوم نہیں اور ان کے محل معلوم ہوجا ئینگے اگر وسطی ضلع معلوم ہوجائیں۔ اس لیے سوال ان وسطی ضلعوں کے معلوم کرنے کا رہ جاتا ہے۔

مرکز ہندسی میں کے انتصابی خط گ گ کے دونوں طرف فاصلہ ق پر خطوط کھینچو اور ان پر طول ا ۲ = ۱، ۲ قایم کرو اور سروں کو چلیپے وار ملاؤ۔ یہ مرکز ہندسی میں کے انتصابی خط پر تقاطع کرینگے۔ یہ خطوط چلیپائی خطوط کہلاتے ہیں۔

اب کوئی انتصابی خط ۶ ۶ کھینچو۔ تب صریحاً اس انتصابی پر وسطی ضلعوں اور چلیپائی خطوط سے مساوی مقطوعے بنینگے۔ اس سے لازم آتا ہے کہ اگر ایک وسطی ضلع پر ایک نقطہ معلوم ہوجائے تو دوسرے وسطی ضلع پر اس سے انتصاباً نیچے کا نقطہ معلوم ہوجائیگا۔

اب فرض کرو کہ اس فصل کا دایاں وسطی ضلع متصل فصل کے بائیں وسطی ضلع سے نقطہ جا پر ملتا ہے جو انتصابی خط ص ص پر واقع ہے (شکل ۱۰۱)۔

اب مثلثات گ جا ک اور ط ۲، ۳ پر غور کرو۔

یہ مشابہ ہیں اس لیے $\frac{\text{جا ک}}{\text{۲، ۳}} = \frac{\text{لا}_۱}{\text{ق}}$

$\therefore$ ق × جا ک = ۲، ۳ × لا$_۱$

= لا$_۱$ × رقبہ ب ا ب

= $\frac{\text{م}_\text{ب} \text{ل}_۱}{۲}$ × لا$_۱$

اسی طرح مثلث گ$_۲$ جا ک پر غور کرنے سے

ق × جا ک = $\frac{\text{م}_\text{ب} \text{ل}_۲}{۲}$ × لا$_۲$

جہاں ل$_۲$ متصل فصل کا طول ہے۔

$$\therefore\ \text{لا}_1\,\text{ل}_1 = \text{لا}_2\,\text{ل}_2$$

$$\text{نیز}\ \ \text{لا}_1 + \text{لا}_2 = \tfrac{1}{3}\left(\text{ل}_1 + \text{ل}_2\right)$$

$$\therefore\ \text{لا}_1 = \frac{\text{ل}_2}{3}$$

$$\text{لا}_2 = \frac{\text{ل}_1}{3}$$

∴ ص ص انتصابی ماما سے فاصلہ $\frac{\text{ل}_2}{3}$ پر ہوگا، اور اس لحاظ سے اس کو مقلوب تثلیثی خط کہتے ہیں۔

"ثابت نقطوں" کی دریافت ——— فرض کرو کہ ا ب ج (شکل ۱۰۸) ایک مسلسل شہتیر کے دو متصل فصل ہیں۔ تثلیثی خطوط کھینچو جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

فرض کرو کہ یہ معلوم ہے کہ فصل ا ب کا دایاں وسطی ضلع ایک ثابت نقطہ ف میں سے گزرتا ہے۔ فرض کرو کہ یہ وسطی ضلع مقلوب تثلیثی خط ص ص کو جا پر اور تثلیثی خط ماما کو ل پر قطع کرتا ہے۔ تب ل ب ایک سہارے کا ماس ہونا چاہیے۔ ل ب کو خارج کر کے فصل ب ج کے پہلے تثلیثی خط سے لَ پر ملنے دو۔ تب جا لَ بایاں وسطی ضلع ہوگا۔ ف ب کو ملا کر خارج کرو اور جا لَ سے فَ پر ملنے دو۔ تب فَ دوسرے فصل کے وسطی ضلعوں پر ایک ثابت نقطہ ہوگا اس کا ثبوت یہ ہے:—

فرض کرو کہ ف میں کا انتصابی خط تثلیثی خطوط سے فاصلوں ی₁، ی₂ پر ہے۔
تب چونکہ مثلثات فَ جا ن اور فَ کَ لَ مشابہ ہیں۔

$$\therefore\ \frac{\text{جا ن}}{\text{کَ لَ}} = \frac{\text{ی}_1 - \frac{1}{3}\text{ل}_2}{\text{ی}_2} \quad \text{..........}\ (1)$$

اور چونکہ مثلثات بَ کَ لَ اور بَ ک ل مشابہ ہیں۔

$$\therefore\ \frac{\text{کَ لَ}}{\text{ک ل}} = \frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1} \quad \text{..........}\ (2)$$

نیز مثلثات ف ل ک اور ف جا ن مشابہ ہیں۔

$$\therefore \frac{\text{ک ل}}{\text{جا ن}} = \frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

(۱)، (۲)، (۳) کو اکٹھے ضرب دینے سے

$$1 = \frac{\text{ی}_1 - \frac{1}{3}\text{ل}_2}{\text{ی}_2} \times \frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2} \times \frac{\text{ل}_2}{\text{ل}_1}$$

$$\therefore \frac{\text{ی}_1 - \frac{1}{3}\text{ل}_2}{\text{ی}_2} = \frac{\text{ل}_1\text{ف}_2}{\text{ل}_2\text{ف}_1}$$

$$\text{نیز } \text{ی}_1 + \text{ی}_2 = \frac{\text{ل}_1 + \text{ل}_2}{3}$$

$$\therefore \text{ی}_1 - \frac{1}{3}\text{ل}_2 = -\text{ی}_2 + \frac{1}{3}\text{ل}_1$$

$$\therefore \frac{-\text{ی}_2 + \frac{1}{3}\text{ل}_1}{\text{ی}_2} = \frac{\text{ل}_1\text{ف}_2}{\text{ل}_2\text{ف}_1}$$

$$\therefore \frac{\text{ل}_1}{3\text{ی}_2} = 1 + \frac{\text{ل}_1\text{ف}_2}{\text{ل}_2\text{ف}_1}$$

$$\therefore \text{ی}_2 = \frac{\frac{1}{3}\text{ل}_1\text{ل}_2\text{ف}_1}{\text{ل}_1\text{ف}_2 + \text{ل}_2\text{ف}_1} = \text{مستقل}$$

∴ ف ایک ثابت نقطہ ہے۔

اِس طریقے سے متعدد ثابت نقاط مختلف فصلوں پر معلوم کیے جا سکتے ہیں جیسا کہ آگے چل کر اور سمجھا جائیگا۔

سروں کے فصلوں میں ثابت نقطہ اس طرح معلوم کیا جاتا ہے :-

صورت (۱) آزادانہ سہارا ہُوا سرا ــــ سرے کا معیار یہاں صفر ہونا چاہیے اس لیے سہارے کا مماس اور وسطی ضلع ہم خط ہونے چاہئیں

اِس طرح ا پہلا ثابت نقطہ ہے۔

صورت (۲) د رابستہ یا ثابت سرا ا — سہارے کا پاس افقی ہے اِس لیے پہلا ثابت نقطہ وہاں ہوگا جہاں ا ہیں کا افقی خط پہلے تثلیثی خط کو قطع کرے۔

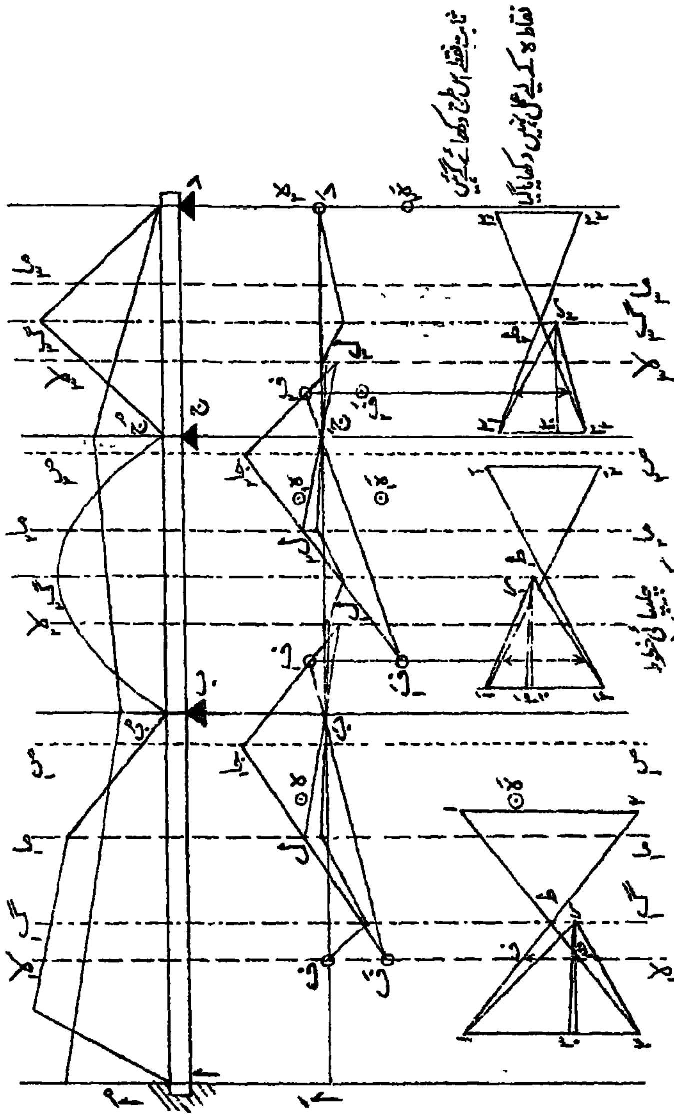
کسی دی ہوئی صورت کے لیے ترسیمی عمل — اب ہم خماؤ کے معیار کا نقشہ حاصل کرنے کا عمل حاصل کر سکتے ہیں جو حسب ذیل ہوگا:-

آزاد خماؤ کے معیار کا نقشہ، تثلیثی خطوط، مقلوب تثلیثی خطوط اور مراکزِ ہندسی میں کے انتصابی خطوط کھینچو۔ شکل ۱۰۹ میں تین فصل کا ایک مسلسل شہتیر دکھایا گیا ہے جس کا ایک سرا آزادانہ سہارا ہوا ہے اور دوسرا ثابت ہے۔ ل لا بائیں تثلیثی خطوط کو، ما ما دائیں تثلیثی خطوط کو، ص ص مقلوب تثلیثی خطوط کو اور گ گ مراکزِ ہندسی میں کے انتصابی خطوط کو تعبیر کرتے ہیں۔

اب چلیپائی خطوط کاغذ کے پائین میں کھینچو۔ یہ خطوط اس طرح حاصل ہونگے کہ مراکزِ ہندسی میں کے انتصابی خطوط کے دونوں طرف آ × ے کو تعبیر کرنے والے فاصلے سے کسی مناسب کسری فاصلے پر انتصابی خطوط کھینچے جائیں اور ان پر آزاد خماؤ کے معیار کے منحنی کے رقبے س، س وغیرہ قائم کیے جائیں۔ (آ × ے کا پیمانہ وہی ہوگا جو رقبوں کا ہو۔ اگر سہاروں کے صرف معیار مطلوب ہوں، انحراف مطلوب نہ ہوں اور آ × ے کی قیمت ہر ایک فصل کے لیے وہی ہو تو آ × ے کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں۔ اور کوئی مناسب قطبی فاصلہ لیا جا سکتا ہے۔

چلیپائی خطوط کے نقاطِ تقاطع ط، ط، ط ہیں۔

اب ثابت نقطے معلوم کرو۔ سرا ا ثابت ہے اِس لیے پہلا ثابت نقطہ ف ہوگا۔ اب چلیپائی خطوط کے درمیان کے مقطعے ف ق کے مساوی ف ف قائم کرو اور مقلوب تثلیثی خط تک کوئی خط ف جا کھینچو جو ما ما کو ل پر قطع کرے۔ ل ب کو ملاؤ اور خارج کرکے تثلیثی خط لا لا سے ل پر ملنے دو۔ تب ل جا اور ف ب کے تقاطع سے دوسرے فصل کا ثابت نقطہ ف حاصل ہوگا۔



شکل ۱۰۹ء۔ تین فصل کے مسلسل شہتیر کی ترسیمی بحث

پھر یہی عمل دوہرایا جائے جیسا کہ شکل میں کیا گیا ہے تو نقطے فَ، فَ، فَ حاصل ہونگے۔ اب دوسرے سرے د سے چلو۔ یہ آزادانہ سہارا ہوا ہے اس لیے جیسا کہ ہم بتا چکے ہیں پہلا ثابت نقطہ کَ نقطہ دَ پر ہی واقع ہوگا۔ پھر چلیپائی خطوط کے ذریعے متناظر ثابت نقطہ کَ حاصل کرو۔ اور پھر نقاط ف کے لیے جو عمل کیا گیا اس کو دوہرانے سے ثابت نقاط کَ، کَ، کَ حاصل ہونگے۔ اب وسطی اضلاع اور سہاروں پر کے مماس کھینچ لو۔ عمل کی صحت کی جانچ دو طرح سے ہوسکتی ہے:۔

(ا) وسطی اضلاع مراکز ہندسی میں کے انتصابی خطوط پر ملنے چاہییں۔

(ب) متصل وسطی ضلع ملائے جائیں تو ان کو سہاروں کے نقاط میں سے گزرنا چاہیے۔

اب چلیپائی خطوط پر کے نقاط ۱، ۲، وغیرہ سے سہاروں پر کے مماسوں کے متوازی خطوط کھینچو اور قطب ب، ب، ب حاصل کرو اور پھر وسطی ضلعوں کے متوازی خطوط کھینچو جس سے نقاط ۰، ۳، وغیرہ حاصل ہونگے۔ تب

$$م = \frac{۱۰ \times ۲}{ل}$$

اور اسی طرح۔ اب سہاروں کے معیار قایم کرو۔ اس طرح حقیقی خماؤ کے معیار کا نقشہ حاصل ہو جائیگا۔

مسلسل شہتیر کے سہاروں کے معیار معلوم کرنے کا ایک اور دلچسپ ترسیمی طریقہ ہے جو پروفیسر کلیکسٹن فڈ لہ نے وضع کیا ہے اور ان کی کتاب پل کی تعمیر میں موجود ہے۔

مسلسل شہتیروں کے فوائد اور نقصانات ـــــ مسلسل شہتیروں کے خماؤ کے معیاروں کے نقشے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ اعظم خماؤ کا معیار کم ہوتا ہے بہ نسبت اس کے کہ ان ہی فصلوں پر سادہ سہارے ہوئے شہتیر علیحدہ رکھ دیے جاتے (سوائے اس صورت کے کہ دو مساوی فصل یکساں لدے ہوئے ہوں اور اس صورت میں مسلسل شہتیر اور علیحدہ شہتیروں کے اعظم معیار مساوی ہوتے ہیں)

اور یہ کہ اعظم معیار پیل پایوں پر واقع ہوتے ہیں۔ مسلسل شہتیروں کے بڑے نقائص جو بیان کیے جاتے ہیں یہ ہیں —

(ا) تمام سہاروں کے ایک ہی سطح میں رہنے کا یقین نہیں کیا جاسکتا۔

(ب) زور محسوب کرنے کے طریقے میں شہتیر کی تراش کو یکساں فرض کیا گیا ہے۔ یہ کفایت کے منافی ہے۔

محکم کنکریٹ میں یہ نقائص اب پیش نہیں کیے جاتے اور محکم کنکریٹ کے شہتیر تقریباً ہمیشہ مسلسل بنائے جاتے ہیں۔

(ا) کے متعلق کم از کم متعدد اشیاء میں مصنف کا خیال ہے کہ اگر لیول کسی قدر بدل بھی جائیں تو شہتیر میں ان نئے حالات کی مناسبت سے ایک مستقل خم پیدا ہوجائیگا اور زور اپنی آپ ترتیب کرلینگے۔

(ب) کے متعلق اکثر ماہرین کا خیال ہے کہ اس طرح جو غلطی واقع ہوگی وہ اتنی بڑی نہیں ہوگی کہ حسابات کو غلط ٹھہرائے۔

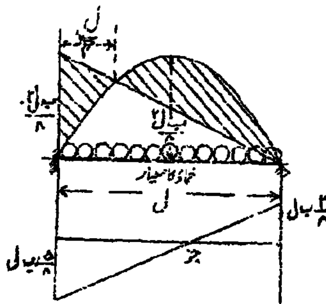
یہ دونوں نقائص اس طرح دور ہوسکتے ہیں کہ نقاطِ انعطاف پر شہتیر کو قطع کردیا جائے اور وسطی حصوں کو سہاروں پر کے حصوں یا برآمدہ بیرموں پر ٹکایا جائے۔ برآمدہ بیری گرڈر پل کا یہی اصول ہے اور بڑے فصل کے پلوں میں کامیاب ثابت ہوا ہے۔ فصل بڑا ہو تو شہتیر کے ذاتی وزن کا اضافی اثر زیادہ ہوتا ہے یہاں تک کہ ایک فصل ایسا آتا ہے جس پر سادہ سہارے ہوئے شہتیر کا استعمال ناممکن ہوجاتا ہے کیونکہ اس کے ذاتی وزن سے پیدا ہونے والے زور جائز زور کی حد سے بڑھ جاتے ہیں۔ برآمدہ بیری گرڈر پل کی صورت میں اعظم معیار سہاروں پر آتا ہے اور ان مقامات پر کھاؤ کا معیار بڑھائے بغیر مضبوطی کو بڑھانا آسان ہے۔ اس کی بہترین مثالوں میں سے ایک فورتھ (Forth) کا پل ہے جس کا بیان بہت سبق آموز اور دلچسپ ہوگا اور جن طلبہ کو بڑے فصل کے پلوں کی تجویز میں دلچسپی ہو وہ اس کا مطالعہ کریں۔

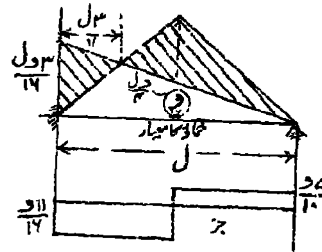
موافق حالات کے تحت مسلسل شہتیروں کا استعمال بڑی کفایت کا موجب ہوتا ہے لیکن برطانوی مجوز ان کے عام نقصانات کا خیال کرکے عام طور پر

ان کا استعمال نہیں کرتے۔

شہتیر جو ایک سرے پر ثابت اور دوسرے پر آزادانہ سہارے

ہوئے ہوں ـــــ اگر ایک شہتیر کا ایک سرا ثابت اور دوسرا آزادانہ سہارا ہوا ہو تو خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے وہی ہونگے جو ایک ایسے مسلسل شہتیر کے نصف کے ہوتے جس کے دو مساوی فصل ہوں اور لداؤ اسی طرح کا ہو جس طرح کا زیر بحث شہتیر میں ہے۔





شکل ۲۱۰ و ۲۱۱ شہتیر جو ایک سرے پر ثابت اور دوسرے پر سہارے ہوئے ہوں

اس کی وجہ یہ ہے کہ سرے کو ثابت کرنے سے وہ افقی ہو جاتا ہے اور مساوی فصلوں اور ایک جیسے لداؤ کے دو فصلوں کے شہتیر کے وسطی سہارے پر یہی ہوتا ہے۔ ذیل کی دو معیاری صورتوں پر غور کرنے سے یہ واضح ہو جائیگا۔

(ا) ایک سرا ثابت، دوسرا آزادانہ سہارا ہوا، بوجھ یکساں۔ اس صورت میں خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے وہی ہونگے جو اس مسلسل شہتیر کے ایک فصل کے تھے جس پر ہم نے سب میں پہلے غور کیا ہے۔ یہ نقشے شکل ۲۱۰ میں دکھائے گئے ہیں۔

(ب) ایک سرا ثابت، دوسرا آزادانہ سہارا ہوا، بوجھ مرکزی۔ فرض کرو کہ مرکزی بوجھ و ہے اور فصل ل ہے۔

تب، اگر ب ثابت سرا ہو اور ا آزادانہ سہارا ہوا اور ا' خیالی آزادانہ سہارا ہوا سرا جو ثابت سرے کے دوسری جانب ہے تو تین معیاروں کے مسئلے سے

$$م_{ا} ل + ۲ م_{ب} (ل + ل) + م_{ا'} ل = ۶ \left\{ \frac{و ل}{۴} \times \frac{ل}{۲} \times \frac{ل}{۲ ل} + \frac{و ل}{۴} \times \frac{ل}{۲} \times \frac{ل}{۲ ل} \right\}$$

اِس میں $م_{ا} = م_{ا'} = ۰$

$$\therefore \quad ۲ م_{ب} \times ۲ ل = ۶ \left\{ \frac{و ل^{۳}}{۱۶ ل} + \frac{و ل^{۳}}{۱۶ ل} \right\}$$

$$\therefore \quad م_{ب} = \frac{۳ و ل}{۱۶}$$

اِس طرح خماؤ کے معیار کا نقشہ شکل ۱۱۱ کے مطابق ہوگا۔
جز کا نقشہ حاصل کرنے کے لیے پہلے ردِّ عمل معلوم کرو۔

$$ر_{ا} = \frac{و}{۲} + \frac{م_{ا} - م_{ب}}{ل}$$

$$= \frac{و}{۲} - \frac{۳ و ل}{۱۶ ل}$$

$$= \frac{۵ و}{۱۶}$$

$$\therefore \quad ر_{ب} = \frac{۱۱ و}{۱۶}$$

جز کا نقشہ وہ ہوگا جو شکل میں دیا گیا ہے۔

ہم اس باب کو ختم کرنے سے پہلے ثابت اور مسلسل شہتیروں کی چند اور مثالیں حل کرینگے۔

حل شدہ مثالیں

(۱) ایک شہتیر جس کا فصل ۲۰ فٹ ہے ایک سرے پر دربستہ ہے اور دوسرے سرے سے ۵ فٹ کے فاصلے پر سہارا گیا ہے۔ $\frac{۱}{۲}$ ٹن فی طولی فٹ کے یکساں بوجھ کے لیے خمائو کے معیار اور جز کے نقشے کھینچی۔

فرض کرو کہ شہتیر اب ہے (شکل ۱۱۲) جو سرے ا پر ثابت ہے اور نقطہ ج پر سہارا گیا ہے۔

شہتیر کا حصہ ب ج ایک برآمدہ بیرم کی طرح ہے اس لیے ج پر خمائو کا معیار

$\text{م}_{\text{ج}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۵\times۵}{۲} = ۶٫۲۵$ فٹ ٹن

ا پر معیار معلوم کرنے کے لیے ایک خیالی فصل ا جَ مانو جو بالکل ا ج کے مشابہ ہے اور دیوار کے اندر ہے۔

تب تین معیاروں کے مسئلے سے

$$\text{م}_{\text{جَ}} \times ۱۵ + ۲\,\text{م}_{\text{ا}}(۱۵+۱۵) + \text{م}_{\text{ج}} \times ۱۵ = \frac{۱}{۸}(۱۵^۳+۱۵^۳)$$

لیکن $\text{م}_{\text{جَ}} = \text{م}_{\text{ج}} = ۶٫۲۵$

$$\therefore\quad ۶۰\,\text{م}_{\text{ا}} + ۶٫۲۵ \times ۳۰ = \frac{۱}{۸}(۲\times۱۵^۳)$$

$$\therefore\quad ۴\,\text{م}_{\text{ا}} + ۱۲٫۵ = \frac{۱۵^۲}{۴}$$

$$\therefore\quad ۴\,\text{م}_{\text{ا}} = \frac{۱۵^۲}{۴} - ۱۲٫۵$$

$$= ۵۶٫۲۵ - ۱۲٫۵ = ۴۳٫۷۵$$

∴ $م_ا$ = ۱۰٫۹۴ فٹ ٹن تقریباً

اِس طرح خماؤ کے معیار کا نقشہ وہ ہوگا جو شکل میں دیا گیا ہے۔ ج پر کا ردِّ عمل معلوم کرنے کے لیے بالکل مسلسل شہتیروں کا سا عمل کرنے سے

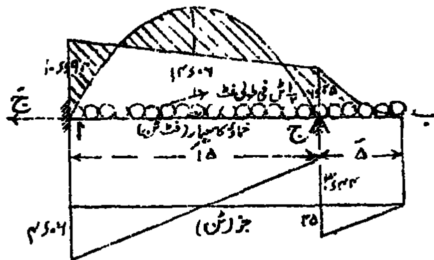
$$ر_ج = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۵}{۲} + \frac{م_ج - م_ا}{۱۵} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۵}{۲} + \frac{م_ج - م_ب}{۵}$$

= ۳٫۷۵ − ۰٫۳۱ + ۱٫۲۵ + ۱٫۲۵

= ۳٫۴۴ + ۲٫۵

= ۵٫۹۴ ٹن

اِس طرح جز کا نقشہ وہ ہوگا جو شکل میں دیا گیا ہے۔



شکل ۱۱۲

(۲) ایک بیلی ہوئی کڑی ا ایک سرے پر مضبوطی کے ساتھ دربستہ ہے اور دوسرا سرا ڈھلے لوہے کے ایک ستون کے اوپر آزادانہ ٹکا ہوا ہے۔ کڑی کا فصل ۱۶ فٹ ہے اور اس پر ستون سے ۱۲ فٹ کے فاصلے پر ۱۰ ٹن کا ایک اکیلا بوجھ ہے۔ ستون کا ردِّ عمل معلوم کرو اور خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے کھینچو۔ (بی ایس سی لندن سنہ ۱۹۰۷ء)۔

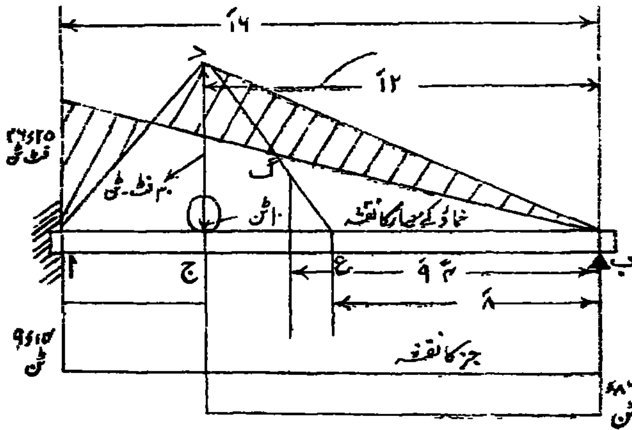
فرض کرو کہ ا ب شہتیر ہے جو سرے ا پر ثابت ہے۔ بوجھ نقطہ ج پر ہے (شکل ۱۱۳ ء)۔

آزاد خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مثلث ا د ب ہوگا جس میں ج د

$$= \frac{ث ا ب}{ل} = \frac{۴ \times ۱۲ \times ۱۰}{۱۶} = ۳۰ \text{ فٹ ٹن}$$

اِس نقشے کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times ۳۰ \times ۱۶ = ۲۴۰$ مربع فٹ ٹن

اس کا مرکزِ ہندسی گ شہتیر کے مرکز ع سے فاصلہ $\frac{1}{3}$ ع ج پر یعنی ب سے $۹\frac{1}{3}$ فٹ کے فاصلے پر ہوگا۔



شکل ۱۱۳ ء۔ اُس شہتیر کی مثال جو ایک سرے پر ثابت اور دوسرے پر سہارا ہوا ہو

اب ثابت سرے کے دوسری جانب ایک فصل ا ب کے بالکل مشابہ فرض کرو تو تین معیاروں کے مسئلے سے

$$۱۶ م_{ب} + ۲ م_{ا} (۱۶ + ۱۶) + ۱۶ م_{ب} = ۶ \left\{ \frac{۹\frac{1}{3} \times ۲۴۰}{۱۶} + \frac{۹\frac{1}{3} \times ۲۴۰}{۱۶} \right\}$$

لیکن $م_{ب} = م_{ب} = ۰$

$$\therefore\ ۶۴\,م_ا = \frac{۲۸\times ۲۴۰\times ۲\times ۶}{۱۶\times ۳} = ۲۴۰\times ۷$$

$$م_ا = \frac{۲۴۰\times ۷}{۶۴} = \frac{۲۱۰}{۸}$$

$$= ۲۶٫۲۵ \text{ فٹ ٹن}$$

آزادانہ سہارے ہوئے شہتیر کی صورت میں ب کا ردِّ عمل

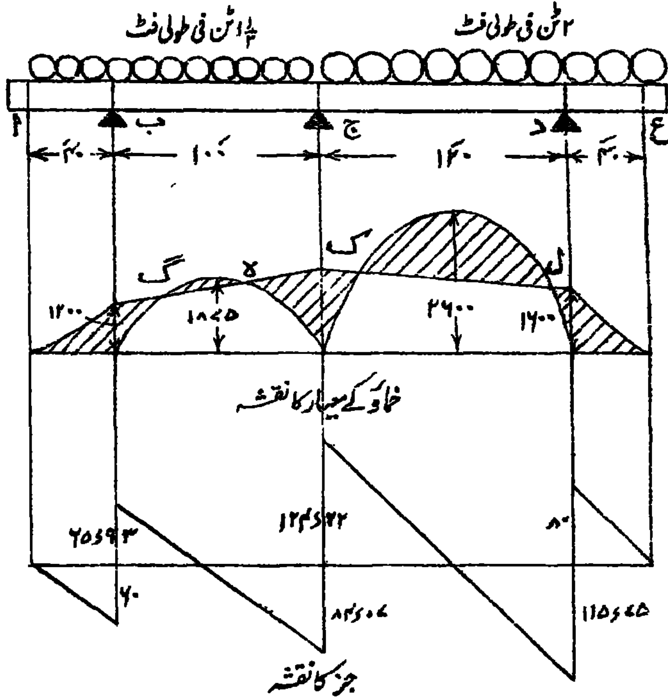
$$= ر_ب = \frac{۴\times ۱۰}{۱۶} = ۲٫۵ \text{ ٹن}$$

$$\therefore \text{ موجودہ صورت میں } س_ب = ر_ب + \frac{م_ب - م_ا}{ل}$$

$$= ۲٫۵ + \frac{۲۶٫۲۵ - ۰}{۱۶}$$

$$= ۱٫۶۴ - ۲٫۵$$

$$= ۰٫۸۶ \text{ ٹن}$$



شکل ۱۱۴

(۳) ایک مسلسل گرڈر دو نامساوی فصلوں پر مشتمل ہے جن کے طول ۱۰۰ فٹ اور ۱۲۰ فٹ ہیں۔ گرڈر کا طول ۳۰۰ فٹ ہے اور دونوں سروں پر برآویختہ ہے اور لداؤ وہ ہے جو شکل میں دکھایا گیا ہے (شکل ۱۱۴)۔ خماؤ کے معیار اور جز کے نقشے کھینچو اور نقاطِ انعطاف اور سہاروں کی قوتوں کی مقدار دکھاؤ (بی۔ ایس سی لندن ۱۹۰۷ء)

اس صورت میں سروں کے حصے اب اور دع برآمدہ بیرم ہیں۔

$$\therefore \quad م_{ب} = \frac{40 \times 1\frac{1}{2} \times 40}{2} = 1200 \text{ فٹ ٹن}$$

$$م_{د} = \frac{40 \times 2 \times 40}{2} = 1600 \text{ فٹ ٹن}$$

فصل ب ج کے لیے آزاد خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا

$$\text{جس کا اعظم معین} = \frac{100 \times 100 \times 1\frac{1}{2}}{8} = 1875 \text{ فٹ ٹن}$$

فصل ج د کے لیے آزاد خماؤ کے معیار کا نقشہ ایک مکافی ہوگا

$$\text{جس کا اعظم معین} = \frac{120 \times 120 \times 2}{8} = 3600 \text{ فٹ ٹن}$$

تب تین معیاروں کے مسئلے سے

$$100\, م_{ب} + 2\, م_{ج}\,(100+120) + 120\, م_{د} = \frac{1}{4}\left(100^3 \times 1\frac{1}{2} + 120^3 \times 2\right)$$

$$\text{یعنی } 120000 + 440\, م_{ج} + 192000 = 375000 + 864000$$

$$440\, م_{ج} = 927000$$

$$م_{ج} = 2107 \text{ فٹ ٹن تقریباً}$$

اب ردِّ عملوں کو دیکھو:—

$$ر_ب = \tfrac{1}{2} \times ۴۰ \times ۱\tfrac{1}{2} + \frac{م_ب - م_ا}{۴۰} + \tfrac{1}{2} \times ۱۰۰ \times ۱\tfrac{1}{2} + \frac{م_ب - م_ج}{۱۰۰}$$

$$= ۳۰ + ۳۰ + ۷۵ - ۹٫۰۷$$

$$= ۶۰ + ۶۵٫۹۳ = ۱۲۵٫۹۳ \text{ ٹن}$$

$$ر_ج = \tfrac{1}{2} \times ۱۰۰ \times ۱\tfrac{1}{2} + \frac{م_ج - م_ب}{۱۰۰} + \tfrac{1}{2} \times ۲ \times ۱۲۰ + \frac{م_ج - م_د}{۱۲۰}$$

$$= ۷۵ + ۹٫۰۷ + ۱۲۰ + ۴٫۲۲$$

$$= ۸۴٫۰۷ + ۱۲۴٫۲۲ = ۲۰۸٫۲۹ \text{ ٹن}$$

$$ر_د = \tfrac{1}{2} \times ۲ \times ۱۲۰ + \frac{م_د - م_ج}{۱۲۰} + \tfrac{1}{2} \times ۲ \times ۴۰ + \frac{م_د - م_ع}{۴۰}$$

$$= ۱۲۰ - ۴٫۲۲ + ۴۰ + ۴۰$$

$$= ۱۱۵٫۷۸ + ۸۰ = ۱۹۵٫۷۸ \text{ ٹن}$$

حاصل جمع ۵۳۰ ٹن

اس طرح جز کے نقشے شکل کے مطابق حاصل ہو گئے۔ اور نقاط گ، ﻫ، ک، ل نقاطِ انعطاف ہیں۔

(۴) ایک مسلسل شہتیر کا مجموعی طول ل ہے اور اس کے تین فصل ہیں اور اس پر بوجھ یکساں ہے۔ فصلوں کا سب میں زیادہ باکفایت انتظام معلوم کرو۔

تشاکل سے لازم آتا ہے کہ بہترین انتظام میں سروں کے فصل مساوی ہوں۔ فرض کرو کہ ان میں سے ہر ایک طول $ل_۱$ ہے اور وسطی فصل کا طول $ل_۲$ (شکل ۱۱۱ ا)۔ تب

ل = ل۲ + ۲ ل۱

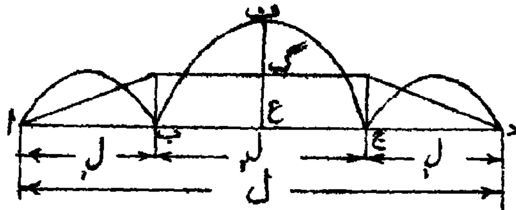
اب تین میاروں کے مسئلے سے

م۱ ل۱ + ۲ مب (ل۱ + ل۲) + مج ل۲ = وَ/۴ (ل۱³ + ل۲³)

تشاکل سے مج = مب

اور م۱ = ۰

∴ مب (۲ ل۱ + ۳ ل۲) = وَ/۴ (ل۱³ + ل۲³)



شکل ۱۱۴ ا

ہم کو ل۱ اور ل۲ کا وہ ربط مطلوب ہے جس سے مب اقل ہو اور پھر اس کا اطمینان کرنا ہوگا کہ مب درمیانی خماؤ کے میاروں سے زیادہ ہے۔ اس ربط سے سب میں زیادہ باکفایت انتظام حاصل ہوگا۔

مب = وَ/۴ (ل۱³ + ل۲³) ÷ (۲ ل۱ + ۳ ل۲)

لیکن ل۲ = ل − ۲ ل۱

∴ مب = وَ/۴ {(ل − ۲ ل۱)³ + ل۱³} ÷ (۲ ل۱ + ۳ ل − ۶ ل۱)

یہ اقل ہوگا جب کہ ذ مب / ذ ل۱ = ۰

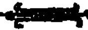
یعنی $\frac{\text{ف}}{\text{ف}\,\text{ل}_{۱}}\left(\frac{\text{ل}^{۳} - ۶\,\text{ل}^{۲}\,\text{ل}_{۱} + ۱۲\,\text{ل}\,\text{ل}_{۱}^{۲} - ۷\,\text{ل}_{۱}^{۳}}{۳\,\text{ل} - ۴\,\text{ل}_{۱}}\right) = ۰$

یا $(۳\,\text{ل} - ۴\,\text{ل}_{۱})(-۲۱\,\text{ل}_{۱}^{۲} + ۲۴\,\text{ل}_{۱}\,\text{ل} - ۶\,\text{ل}^{۲})$

$+ ۴\,(\text{ل}^{۳} - ۶\,\text{ل}^{۲}\,\text{ل}_{۱} + ۱۲\,\text{ل}_{۱}^{۲}\,\text{ل} - ۷\,\text{ل}_{۱}^{۳}) = ۰$

یا $۵۶\,\text{ل}_{۱}^{۳} - ۱۱۱\,\text{ل}\,\text{ل}_{۱}^{۲} + ۷۲\,\text{ل}_{۱}\,\text{ل}^{۲} - ۱۴\,\text{ل}^{۳} = ۰$

اِس مساوات کا حل ترسیم کے ذریعے $\text{ل}_{۱} = ۳۵ء\,\text{ل}$ پایا جائیگا۔
اِس طرح دیکھو سہاروں کے معیاروں کی اقل قیمت اُس وقت واقع ہوتی ہے جب کہ سروں کا ہر ایک فصل ۳۵ء ل ہو اور وسطی فصل ۳ء ل موجودہ صورت میں درمیانی خمائو کے معیار سہاروں کے معیاروں سے کم ہیں۔ اس طرح یہ انتظام سب میں زیادہ باکفایت ہے۔



دسواں باب

شہتیروں میں جزی زوروں کی تقسیم

جب کوئی شہتیر[1] منصرف ہوتا ہے تو اس کے ہر نقطے پر ایک افقی جزی زور ہوتا ہے جو ایک پرت پر سے دوسری پرت کے پھسلنے کو روکتا ہے۔ ہم یہ دکھا چکے ہیں (صفحہ ۱۵) کہ لچکدار شئے میں ایک جزی زور کے ساتھ ایک مساوی حدت کا جزی زور اس کے علی القوائم ہمیشہ پایا جاتا ہے۔ اس طرح دیکھو شہتیر کی صورت میں کسی نقطے پر افقی اور انتصابی جزی زوروں کی حدتیں کسی نقطے پر مساوی ہونگی۔ اب کسی انتصابی تراش پر مجموعی جزی قوت اُس جزی قوت کے مساوی ہونی چاہیے تو گزشتہ ابواب کی طرح شہتیر کی قوتوں پر غور کرنے سے حاصل ہو۔ لیکن زور کی حدت تراش کے اندر یکساں نہیں ہوگی۔ اس طرح جزی قوت ج کو تراش کے رقبہ ب سے تقسیم کرنے سے جیسا کہ عام طور پر کیا جاتا ہے، اعظم جزی زور نہیں حاصل ہوگا۔

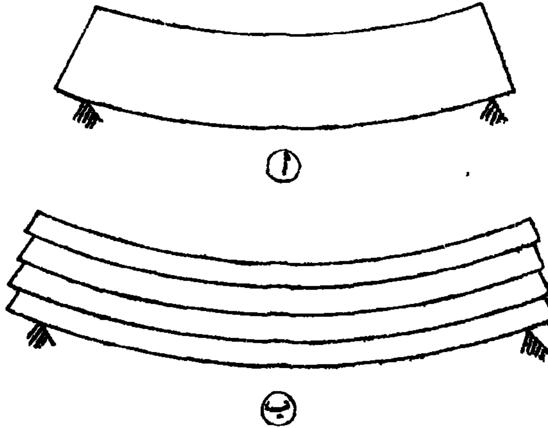
اُفقی جزی زور کی موجودگی ذیل کے تجربے سے نظر آسکتی ہے۔ شکل ۱۱۵ء ا میں ایک چھوٹا شہتیر دکھایا گیا ہے جو کسی بوجھ کے تحت

ا۔ ہم اس بحث میں فرض کرینگے کہ شہتیر افقی ہے۔ اگر یہ صورت نہ ہو تو "افقی" اور "انتصابی" کی بجائے "شہتیر کے محور کے متوازی" اور "شہتیر کے محور کے علی القوائم" پڑھے جائیں۔

منصرف ہوا ہے۔ اب خیالی طور پر شہتیر کی بجائے چند تختیاں ایک کے اوپر ایک رکھ دو۔ یہ تختیاں ایک دوسری پر پھسل کر وہ وضع اختیار کرینگی جو شکل کے حصہ ب میں دکھائی گئی ہے۔ اس دوسری صورت میں یعنی تختیوں کی صورت میں مضبوطی پہلی صورت سے کم ہوتی ہے۔ اور یہ ظاہر ہے کہ صورت ا میں ایسے زور پائے جائینگے جو ایک پرت کو دوسری پر پھسلانے کی کوشش کرینگے۔

اب ہم شہتیر کے کسی نقطے پر جزی زور کا جملہ حاصل کرینگے اور بعد میں چند خاص صورتوں پر غور کرینگے۔

عام صورت ۔ فرض کرو کہ ا ب اور ا ب (شکل ۱۱۶) ایک شہتیر کی دو تراشیں ایک چھوٹے فاصلہ لا پر ہیں، اور فرض کرو کہ اس شہتیر کی تراش ایک انتصابی محور کے گرد متشاکل ہے، اور فرض کرو کہ لدائو تمام تر عرضی ہے۔ تب جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں کسی نقطے پر عرضی زور کی حدت ع ج گ اور ع ج گ سے حاصل ہوگی۔ اب تراش ا ب کے اس حصے پر غور کرو جو کسی خط د د کے اوپر ہے۔ تعدیلی محور سے فاصلہ ط ن پر کسی نقطہ ط پر ایک چھوٹے رقبہ یہ پر غور کرو۔



شکل ۱۱۵ ۔ شہتیروں میں افقی جزء

تب خماؤ کے نظریے کی رُو سے ط پر زور کی حدت = $ز_ط = \frac{م \times طن}{آ}$ ،
جہاں م اس نقطے پر خماؤ کا معیار ہے اور آ تراش کا دوسرا معیار۔

∴ رقبہ بہ پر قوت = $ز_ط \times به = \frac{م \times طن}{آ} \times به$

∴ رقبہ د د پر مجموعی قوت = $\Sigma \frac{م \times طن}{آ} \times به$

$= ن = \frac{م}{آ} \Sigma \, به \times طن$

$= \frac{م}{آ} \times$ د د کے اوپر کے رقبے کا پہلا معیار تعدیلی محور کے گرد

$= \frac{م}{آ} \times ب \times ما$ .... (۱)

جہاں ب خط د د کے اوپر کا رقبہ ہے اور ما اس کے مرکزِ ہندسی کا فاصلہ تعدیلی محور سے۔

اسی طرح تراش ۱ ب۱ میں خط د۱ د۱ کے اوپر کے رقبے پر کی قوت

$= ن_۱ = \frac{م_۱}{آ_۱} \times ب_۱ ما_۱$

اب اگر لا چھوٹا ہو اور شہتیر کی تراش میں کوئی یکایک تبدیلی نہ ہو تو ب = ب۱، ما = ما۱، اور آ = آ۱ رکھ سکتے ہیں۔

∴ $ن - ن_۱ = \frac{(م - م_۱) \, ب \, ما}{آ}$ .... (۲)

عرضی قوت کا یہ فرق وہ جزی قوت ہے جو خط د د۱ پر برداشت ہوتی ہے۔ اِس کو یوں لکھ سکتے ہیں

$ن - ن_۱ = \frac{(م - م_۱)}{لا} \times \frac{ب \, ما \, لا}{آ}$

شکل ۱۱۶۔ جزی تقسیم

اب اگر لا بہت چھوٹا ہو تو $\frac{\text{م}_۲ - \text{م}_۱}{\text{لا}}$ خماؤ کے معیار کے بڑھنے یا گھٹنے کی شرح ہوگی اور اس کو ہم دیے ہوئے نقطے ہیں کی تراش پر کی جزی قوت ق کے مساوی ثابت کر چکے ہیں۔

$$\therefore \text{ن}_۲ - \text{ن}_۱ = \frac{\text{ق} \times \text{ب} \times \text{م}_\text{ا} \times \text{لا}}{\bar{\text{ا}}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

یہ جزی قوت رقبہ $\text{د}\,\text{د} \times \text{د}\,\text{د} = \text{د}\,\text{د} \times \text{لا} = \text{لا} \times \text{ض}$ پر عمل کرتی ہے۔

$$\therefore \text{د}\,\text{د} \text{ پر اوسط جزی زور} = \frac{\text{ن}_۲ - \text{ن}_۱}{\text{ض}\ \text{لا}}$$

$$= \frac{\text{ق} \times \text{ب} \times \text{م}_\text{ا} \times \text{لا}}{\text{ب}\,\text{لا} \times \bar{\text{ا}}}$$

یعنی

$$\text{ج}_\text{د} = \frac{\text{ق} \times \text{ب} \times \text{م}_\text{ا}}{\bar{\text{ا}} \times \text{ض}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

اس کو پوری تراشش پر کے اوسط زور س $= \frac{\text{ق}}{\text{ب}}$ کی رقوم میں یوں لکھ سکتے ہیں:—

$$\text{ج}_\text{د} = \frac{\text{ق} \times \text{ب} \times \text{م}_\text{ا}}{\text{ب} \times \text{گ}^۲ \text{ض}}$$

$$= \text{س} \times \frac{\text{ب} \times \text{م}_\text{ا}}{\text{گ}^۲\,\text{ض}} \quad \ldots\ldots (۵)$$

اس میں $\frac{\text{ب ما}}{\text{گ}^{2}\,\text{ض}}$ کو "جز کا سر" کہا جاسکتا ہے۔

دیکھو ب × ما تعدیلی محور تک بڑھتا ہے اور پھر گھٹتا ہے کیونکہ تعدیلی محور کے نیچے سے رقبے کا پہلا معیار منفی ہے۔

اس طرح دیکھو جزی زور تعدیلی محور پر اعظم ہوتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ ج سے دد پر کی اوسط حدّت حاصل ہوتی ہے۔

جزی زور دد پر بھی یکساں نہیں ہوگا لیکن اگر تراش تعدیلی محور پر پتلی ہو جیسا کہ استعمال میں آنے والی تراشیں ہوتی ہیں تو تعدیلی محور پر اعظم جز تعدیلی محور کی ج کی قیمت سے، جو اوپر کے ضابطے سے حاصل ہو، کچھ بہت زیادہ نہیں ہوگا۔ مربع یا مدور جیسی تراشوں میں دد پر اعظم جز اوسط سے ۵ تا ۱۰ فیصدی زیادہ ہوگا اور چپٹے ناقص یا چپٹے مستطیل کے لیے یہ فرق ۲۵ فیصدی تک ہوسکتا ہے۔ دد پر جزی زور کے تغیر سے بحث کرنا ہماری موجودہ بحث کی وسعت سے باہر ہے۔ یہاں صرف اتنا یاد رکھنا کافی ہے کہ یہ زور یکساں نہیں۔ سینٹ وینٹ[ص] نے مختلف صورتوں کے لیے اعظم زور کی قیمت حاصل کی ہے۔

ذیل کی خاص صورتوں پر غور کرو (شکل ۱۱۷، ۱۱۸):-

(۱) مستطیلی تراش ــــ بلندی ھ اور عرض ض ہو تو تعدیلی محور سے فاصلہ لا پر اوسط جز

$$\text{ج}_{\text{لا}} = \text{س} \times \frac{\text{ب} \times \text{ما}}{\text{گ}^{2}\,\text{ض}}$$

$$\text{موجودہ صورت میں ب} = \left(\frac{\text{ھ}}{۲} - \text{لا}\right)\text{ض}$$

$$\text{ما} = \text{لا} + \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ھ}}{۲} - \text{لا}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ھ}}{۲} + \text{لا}\right)$$

$$\text{گ}^{2} = \frac{\text{ھ}^{2}}{۱۲}$$

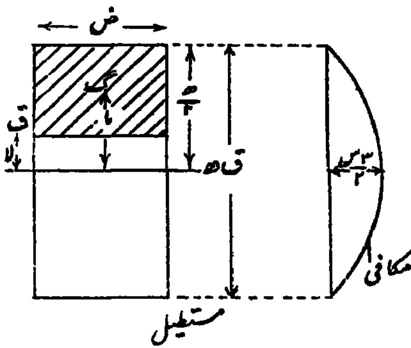
$$\therefore \quad \text{ج}_{\text{لا}} = \frac{\text{س}\left(\frac{\text{ھ}}{۲} - \text{لا}\right)\text{ض} \times \frac{1}{2}\left(\frac{\text{ھ}}{۲} + \text{لا}\right)}{\frac{\text{ھ}^{2}}{۱۲} \times \text{ض}}$$

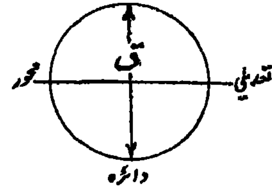
[ص] St. Venant

$$= \frac{6\,س\left(\frac{ھ^2}{4} - لا^2\right)}{ھ^2}$$

$$= 6\,س\left(\frac{1}{4} - \frac{لا^2}{ھ^2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\,س\left(1 - \frac{4\,لا^2}{ھ^2}\right)$$





شکل ۱۱۷

اِس میں $لا^2$ شریک ہوتا ہے اِس لیے مختلف گہرائیوں پر اوسط جزی زور کو تعبیر کرنے والا منحنی ایک مکافی ہوگا۔ ج کی قیمت لا = ۰ یعنی تعدیلی محور پر اعظم ہوگی۔ اِس جگہ ج = $\frac{3\,س}{2}$ = ۱٫۵ ا‌لس۔ یعنی مستطیلی شہتیر میں اعظم جزی زور مرکز پر واقع ہوتا ہے اور پوری تراش کے اوسط جزی زور (یعنی جزی قوت بٹے رقبہ) کا ڈیڑھ گنا ہوتا ہے۔

(۲) مدور تراش — یہ صورت گزشتہ صورت کی طرح آسان نہیں لیکن تعدیلی محور پر کا جزی زور آسانی سے یوں معلوم ہو سکتا ہے:—

اِس صورت میں

$$ب = \frac{\pi\,ق^2}{8}$$

$$\text{ما} = \frac{۲\text{ق}}{۳\pi}$$

$$\text{گ}^{۲} = \frac{\text{ق}^{۲}}{۱۶}$$

$$\text{ض} = \text{ق}$$

$$\therefore \text{تعدیلی محور پر جزی زور} = \text{س} \times \frac{\frac{\pi\,\text{ق}^{۲}}{۸} \times \frac{۲\text{ق}}{۳\pi}}{\frac{\text{ق}^{۲}}{۱۶} \times \text{ق}}$$

$$= \frac{۴}{۳}\text{س} = ۱٫۳۳\,\text{س}$$

یعنی تعدیلی محور پر اوسط جزی زور پوری تراشش کے اوسط جزی زور کا $۱\frac{۱}{۳}$ گنا ہے۔

معلوم ہو کہ اِس صورت میں تعدیلی محور پر کا اعظم جزی زور ۱٫۴۵ س ہوتا ہے۔

(۳) نل نما تراش —— فرض کرو کہ ایک پتلا نل ہے جس کا اوسط قطر ق اور موٹائی ٹ ہے۔

تب
$$\text{ب} = \frac{\pi\,\text{ق}\,\text{ٹ}}{۲}$$

$$\text{ما} = \frac{\text{ق}}{\pi}$$

$$\text{گ}^{۲} = \frac{\text{ق}^{۲}}{۸}$$

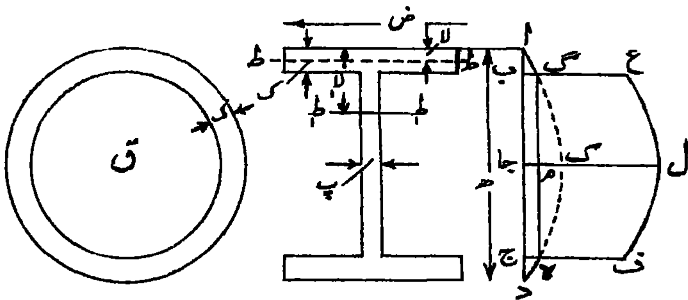
$$\text{ض} = ۲\,\text{ٹ}$$

$$\therefore \text{ج (تعدیلی محور پر)} = \text{س} \times \frac{\frac{\pi\,\text{ق}\,\text{ٹ}}{۲} \times \frac{\text{ق}}{\pi}}{\frac{\text{ق}^{۲}}{۸} \times ۲\,\text{ٹ}} = ۲\,\text{س}$$

یعنی تعدیلی محور پر اوسط جزی زور پوری تراش کے اوسط جزی زور کا دُگنا ہوتا ہے۔

(۴) I تراش ــــــ اِس میں کوروں اور پیٹے پر پڑنے والی جزی قوت علٰحدہ علٰحدہ محسوب کرینگے۔

فرض کرو کہ ایک I شہتیر کا عرض ض، گہرائی ھ، کوروں کی موٹائی ک اور پیٹے کی موٹائی پ ہے۔



شکل ۱۱۸

پہلے کور میں ایک افقی خط ط ط بالائی کنارے سے فاصلہ لا پر لو (شکل ۱۱۸)۔

$$\text{تب ط ط پر اوسط جز} = س \times \frac{ب \times ا}{گ^۲ \times ض}$$

$$= ج_{لا} = \frac{س \times ض\, لا\, (ھ - لا)}{ض\, گ^۲ \times ۲}$$

$$= \frac{س}{۲ گ^۲} (ھ\, لا - لا^۲) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اِس میں لا^۲ شریک ہوتا ہے، اِس لیے زور کے تغیر کا منحنی ایک مکافی ہوگا۔ لا = ک یعنی کور اور پیٹے کے مقامِ اتصال پر

$$\text{ج}_{\text{ک}} = \frac{\text{س}}{۲\,\text{گ}^{۲}}\left(\text{ھ ک} - \text{ک}^{۲}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اب پیٹے میں ایک خط $\text{ط}\,\text{ط}_{۱}$ بالائی کنارے سے فاصلہ $\text{لا}_{۱}$ پر لو۔

تب $\text{ط}\,\text{ط}_{۱}$ پر اوسط جز $= \dfrac{\text{س ب ما}}{\text{گ}^{۲}\,\text{ض}}$

موجودہ صورت میں

ب ما = تعدیلی محور کے گرد $\text{ط}\,\text{ط}_{۱}$ کے اوپر کے رقبے کا پہلا معیار

$$= \frac{\text{ض ک}(\text{ھ} - \text{ک})}{۲} + \text{پ}(\text{لا}_{۱} - \text{ک})\left\{\frac{\text{ھ}}{۲} - \left(\text{ک} + \frac{\text{لا}_{۱} - \text{ک}}{۲}\right)\right\}$$

$$= \frac{\text{ض ک}(\text{ھ} - \text{ک})}{۲} + \frac{\text{پ}(\text{لا}_{۱} - \text{ک})(\text{ھ} - \text{لا}_{۱} - \text{ک})}{۲}$$

اور جزی زور کے عام جملے میں پیٹے کے لیے ض = پ

$$\therefore\; \text{ج}_{\text{ط}_{۱}} = \frac{\text{س}}{۲\,\text{گ}^{۲}}\left\{\frac{\text{ض ک}(\text{ھ} - \text{ک})}{\text{پ}} + \text{پ}\,\frac{(\text{لا}_{۱} - \text{ک})(\text{ھ} - \text{لا}_{۱} - \text{ک})}{\text{پ}}\right\}$$

$$= \frac{\text{س}}{۲\,\text{گ}^{۲}}\left\{\frac{\text{ض ک}(\text{ھ} - \text{ک})}{\text{پ}} + (\text{ھ لا}_{۱} - \text{لا}_{۱}^{۲} - \text{ھ ک} + \text{ک}^{۲})\right\}$$

$$= \frac{\text{س}}{۲\,\text{گ}^{۲}}\left\{(\text{ھ لا}_{۱} - \text{لا}_{۱}^{۲}) + (\text{ھ} - \text{ک})\left(\frac{\text{ض ک}}{\text{پ}} - \text{ک}\right)\right\}$$

$$= \frac{\text{س}}{۲\,\text{گ}^{۲}}(\text{ھ لا}_{۱} - \text{لا}_{۱}^{۲}) + \frac{\text{س ک}(\text{ھ} - \text{ک})(\text{ض} - \text{پ})}{۲\,\text{گ}^{۲}\,\text{پ}} \;\ldots\ldots (۳)$$

اس جملے کی دوسری رقم $\text{لا}_{۱}$ پر منحصر نہیں اور پہلی رقم وہ جزی زور ہے جو واقع ہوتا اگر کورین $\text{ط}\,\text{ط}_{۱}$ تک ہوتیں۔

اس طرح دیکھو زور کی تقسیم کا نقشہ یوں حاصل ہوگا:—

پہلے ایک مکافی ا ک د کھینچو جس کا مرکزی معین بجا ک مساوات (ا)

میں $\text{لا} = \frac{\text{ھ}}{۲}$ رکھنے سے حاصل ہوگا۔

$$\text{یعنی}\quad \text{جاک} = \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲}\left(\frac{\text{ھ}^۲}{۲} - \frac{\text{ھ}^۲}{۴}\right) = \frac{\text{س ھ}^۲}{۸\text{گ}^۲}$$

نقاط ب اور ج پر کوروں کے اندرونی پہلوؤں کے تناظر گ ع اور $\text{ھ ف} = \frac{\text{س ک (ھ - ک) (ض - پ)}}{۲\text{گ}^۲\text{ پ}}$ قایم کرو اور نقاط ع اور ف کے درمیان مکانی کا حصہ گ ک ھ کھینچو۔ تب منحنی اگ ع ل ف ھ د سے تراش کی مختلف گہرائیوں پر جزی زور معلوم ہوگا۔

پیٹے پر مجموعی جزی قوت منحنی کے حصہ ب ع ل ف ج کے رقبے کو پیٹے کے عرض سے ضرب دینے سے حاصل ہوگی۔

اِس صورت پر غور کرو جس میں $\text{ک} = \frac{\text{ھ}}{۱۰}$، $\text{پ} = \frac{\text{ھ}}{۲۰}$ اور $\text{ض} = \frac{\text{ھ}}{۲}$ یہ تقریباً وہ تناسب ہے جو بیلے فولاد کی کڑیوں میں پایا جاتا ہے۔ تب

$$\text{ب گ} = \text{ج ک} = \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲}\left(\text{ھ ک} - \text{ک}^۲\right)$$

$$= \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲}\left(\frac{\text{ھ}^۲}{۱۰} - \frac{\text{ھ}^۲}{۱۰۰}\right)$$

$$= \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲} \times \frac{۹\text{ھ}^۲}{۱۰۰}$$

$$\therefore\quad \text{ھ ک} = \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲}\left(\frac{\text{ھ}^۲}{۴} - \frac{۹\text{ھ}^۲}{۱۰۰}\right) = \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲} \times \frac{۱۶\text{ھ}^۲}{۱۰۰}$$

$$= \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲} \times \frac{۴\text{ھ}^۲}{۲۵}$$

$$\text{نیز}\quad \text{گ ع} = \frac{\text{س ک (ھ - ک) (ض - پ)}}{۲\text{گ}^۲\text{ پ}}$$

$$= \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲} \times \frac{\text{ھ}}{۱۰} \times \frac{۹\text{ھ}}{۱۰} \times \frac{۹\text{ھ}}{۲۰} \times \frac{۲۰}{\text{ھ}}$$

$$= \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲} \times \frac{۸۱\text{ھ}^۲}{۱۰۰}$$

$$\therefore \text{بع} = \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲} \times \frac{۹\text{ھ}^۲}{۱۰۰} + \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲} \times \frac{۸۱\text{ھ}^۲}{۱۰۰}$$

$$= \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲} \times \frac{۹\text{ھ}^۲}{۱۰}$$

منحنی بع ل ف ج کا رقبہ = بج (بع + $\frac{۲}{۳}$ مک)

$$= \frac{۴\text{ھ}}{۵} \times \frac{\text{س}}{۲\text{گ}^۲} \left(\frac{۹\text{ھ}^۲}{۱۰} + \frac{۸\text{ھ}^۲}{۷۵} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

موجودہ صورت میں $\text{آ} = \frac{\text{ض ھ}^۳}{۱۲} - \frac{(\text{ض}-\text{پ})(\text{ھ}-۲\text{ک})^۳}{۱۲}$

$$= \frac{\text{ھ}^۴}{۲۴} - \frac{۹\text{ھ}}{۲۰} \left(\frac{۴\text{ھ}}{۵} \right)^۳ \times \frac{۱}{۱۲}$$

$$= ۰٫۰۴۱۷\,\text{ھ}^۴ - ۰٫۰۱۹۲\,\text{ھ}^۴$$

$$= ۰٫۰۲۲۵\,\text{ھ}^۴$$

تراش کا رقبہ $= \text{ض ھ} - (\text{ض}-\text{پ})(\text{ھ}-۲\text{ک})$

$$= \text{ب} = \frac{\text{ھ}^۲}{۲} - \frac{۹\text{ھ}}{۲۰} \times \frac{۴\text{ھ}}{۵}$$

$$= ۰٫۱۴\,\text{ھ}^۲$$

$$\therefore \text{گ}^۲ = \frac{\text{آ}}{\text{ب}} = \frac{۰٫۰۲۲۵\,\text{ھ}^۴}{۰٫۱۴\,\text{ھ}^۲} = ۰٫۱۶۰۸\,\text{ھ}^۲$$

مساوات (۴) پر واپس آؤ۔ منحنی بع ل ف ج کا رقبہ

$$= \frac{\text{۴ س ھ}}{\text{۱۰ گ}^{۲}}\left\{\frac{\text{۹ ھ}^{۲}}{\text{۱۰}} + \frac{\text{۸ ھ}^{۲}}{\text{۷۵}}\right\}$$

$$= \frac{\text{۴ س ھ} \times \text{۱٫۰۰۷ ھ}^{۲}}{\text{۱۰} \times \text{٫۱۶۰۸ ھ}^{۲}}$$

$$= \text{۲٫۵۰۵ س ھ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{۵})$$

∴ $\text{پیٹے پر پڑنے والا جزر} = \text{۲٫۵۰۵ س ھ} \times \text{پیٹے کا عرض}$

$$= \text{۲٫۵۰۵ س ھ} \times \frac{\text{ھ}}{\text{۲۰}}$$

$$= \text{٫۱۲۵۲ س ھ}^{۲} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{۶})$$

$$\text{پوری تراش کا رقبہ} = \text{٫۱۴ ھ}^{۲}$$

∴ $\text{تراش پر مجموعی جزی قوت ق} = \text{٫۱۴ ھ}^{۲} \times \text{س}$

∴ $\frac{\text{پیٹے پر پڑنے والا جزر}}{\text{مجموعی جزر}} = \frac{\text{٫۱۲۵۲}}{\text{٫۱۴}} = \text{۸۹٫۴ فیصدی}$

عملاً عموماً یہ مان لیا جاتا ہے کہ تختہ اور بکس گرڈروں میں پورا جزر پیٹے پر پڑتا ہے۔ اوپر کے حساب سے معلوم ہوتا ہے کہ I شہتیر میں، جس میں کہ کوریں گہرائی کا لحاظ کرتے اکثر تختہ اور بکس گرڈروں کی کوروں سے بڑی ہوتی ہیں، یہ مفروضہ ۹۰ فیصدی کی حد تک صحیح ہے اس لیے تختہ اور بکس گرڈروں میں جو معمولی قواعد کے تحت تجویز کیے جائیں یہ مفروضہ اور زیادہ صحیح ہوگا اور عملاً بالکل جائز ہوگا۔

لیکن اس کا خیال رہے کہ جو گرڈر کڑیوں اور تختوں کے بنے ہوں یا جیسے کہ عمارتوں میں استعمال ہونے والے مقابلۃً کم گہرے اور وزنی گرڈر ہوتے ہیں ان میں یہ مفروضہ اتنا صحیح نہیں ہوگا۔ لیکن پھر بھی غلطی حفاظت کی جانب ہوگی کیونکہ پیٹے کے حقیقی زور مفروضہ زوروں سے کم ہوں گے۔

تراش کے اندر جزی زور کی تقسیم معلوم کرنے کا ترسیمی طریقہ

کڑیوں اور تختوں سے بنی ہوئی اُس تراش پر غور کرو جو شکل ۱۱۹ ب میں دکھائی گئی ہے۔ پہلا مرحلہ یہ ہے کہ تراش کو ایک انتصابی مرکزی خط کے گرد لایا جائے۔ یہ اِس طرح کیا جاتا ہے کہ کڑیوں پر آڑے اُفقی خطوط کھینچے جائیں اور مرکزی کڑی کے دونوں طرف بازو کی کڑیوں کا اُفقی معین جمع کیا جائے۔ اس سے وہ تراش حاصل ہوگی جو شکل ج میں دکھائی گئی ہے (یعنی ا د = ا ب + ب ج + ج د)۔

کسی خط ط ط پر غور کرو۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ط ط پر اوسط جز

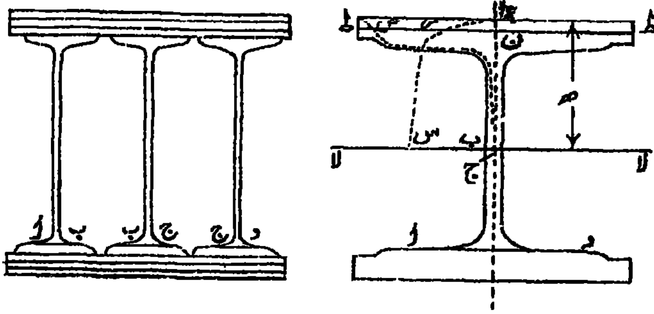
$$= ج_{ط} = س \times \frac{ب\ ما}{گ^{۲}\ ض}$$

اِس میں ب × ما = ط ط کے اوپر کے رقبے کا پہلا معیار تعدیلی محور لا لا کے گرد۔ لالا کے گرد لالا کے اوپر کے حصے کے پہلے معیار کا منحنی کھینچو جس کا طریقہ صفحہ ۹۴ و ۹۵ پر سمجھایا گیا ہے۔ چونکہ تراش ایک انتصابی محور کے گرد متشاکل ہے اس لیے رقبے کے صرف نصف حصہ کے لیے منحنی کھینچنا کافی ہے۔ یہ منحنی لا ص ج ہے۔

تب ب × ما = ۲ × رقبہ جا لا ص ن × ھ

$$\therefore\ ط\ ط \text{ پر اوسط جز} = \frac{س}{گ^{۲}\ ض} \times \frac{۲ \times جا\ لا\ ص\ ن \times ھ}{۱}$$

اب قطبی فاصلہ ف = $\frac{گ^{۲}}{ھ}$ لے کر پہلے معیار کے منحنی کا حاصل جمع منحنی جا ر س حاصل کرو۔



شکل ۱۱۹ء

تب ن م × ف = پہلے معیار کے منحنی کا رقبہ ط ط کے اوپر

∴ (ن م × گ^۲) / ھ = رقبہ جا لا ص ن

∴ ط ط پر اوسط جز = س / (ض گ^۲) × (۲ ن م × گ^۲) / ھ × ھ

= س × (۲ ن م) / ض

لیکن ض = ط ط = ۲ ن ط

∴ ط ط پر اوسط جز = س × (ن م) / (ن ط)

اور اعظم جزی زور جو تعدیلی محور پر واقع ہوگا س × (ج س) / (ج ب) ہوگا۔

نوٹ۔ شکل ۱۱۹ء صرف ایک خاکہ ہے اور پیمانے پر نہیں اتاری گئی۔ طلبہ اس مثال میں تختیاں ۲۰" × ½" اور شہتیر ۱۶" × ۶" لے کر اس کو بطور ایک سوال کے حل کریں۔ صحت کے لیے شکل بڑے پیمانے پر کھینچی جائے۔

شہتیر کا انصراف جزی کی وجہ سے ـــ اب تک ہم نے صرف

خماؤ کے معیار سے پیدا ہونے والے انصراف پر غور کیا ہے۔ اب ہم دیکھینگے کہ جز سے پیدا ہونے والا انصراف خماؤ کے معیار سے پیدا ہونے والے انصراف کے مقابلے میں کتنا ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ج ج (شکل ۱۲۰) ایک شہتیر کے مرکزی خط کے ایک چھوٹے طول لا کو تعبیر کرتا ہے جس پر جزی زور ج ہے۔

تب جز کی وجہ سے خط ج ج وضع ج ج، اختیار کریگا جس کا ڈھال سہ ہوگا۔

تب اگر جز کا مقیاس م ہو تو $\text{سہ} = \frac{\text{ج}}{\text{م}}$

شہتیر کے چھوٹے طول کا انصراف ا ج ج، = لا × سہ کیونکہ سہ چھوٹا ہے۔

$\therefore$ چھوٹے طول لا کا انصراف $= \frac{\text{لا} \times \text{ج}}{\text{م}}$

$\therefore$ جز کی وجہ سے مجموعی انصراف $= \Sigma \frac{\text{لا} \times \text{ج}}{\text{م}}$

اس میں $\text{ج} = \text{س} \times \frac{\text{ب} \times \text{ما}}{\text{ض گ}^2}$ جہاں $\text{س} = \frac{\text{ق}}{\text{ب}}$ جس میں ق تراش پر کی جزی قوت ہے اور ب تراش کا رقبہ۔

اگر تراش طول میں یکساں ہو تو $\frac{\text{ب ما}}{\text{ض گ}^2}$ مستقل ہوگا اور فرض کرو کہ بہ کے مساوی ہے۔

تب جز کی وجہ سے انصراف $= \Sigma \, \text{لا} \times \frac{\text{بہ ق}}{\text{ب م}}$

$= \frac{\text{بہ}}{\text{ب م}} \Sigma \, \text{لا ق}$

لیکن Σ لا ق = جزی قوت کے منحنی کا رقبہ دی ہوئی تراش تک

= خماؤ کا معیار اس تراش پر
= م

∴ جز کی وجہ سے انصراف = صا = $\frac{ب^2}{ب\ م} \times م$ .... (۱)

اب ذیل کی صورتوں پر غور کرو:۔

(۱) منفرد مرکزی بوجھ

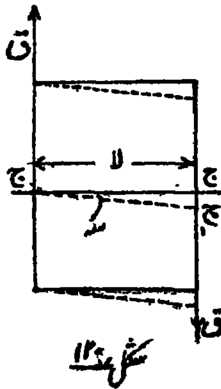
مرکز پر انصراف = صا = $\frac{ب^2}{ب\ م} \times \frac{و\ ل}{۴}$

اور یہ دکھایا جا چکا ہے کہ اس صورت میں خماؤ کے معیار کی وجہ سے

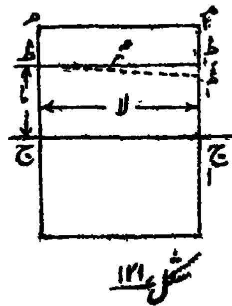
انصراف صد = $\frac{و\ ل^3}{۴۸\ آ\ ے}$

$$∴ \frac{صا}{صد} = \frac{ب^2}{ب\ م} \times \frac{و\ ل}{۴} \div \frac{و\ ل^3}{۴۸\ آ\ ے}$$

$$= \frac{۱۲\ ے}{م} \times \frac{ب^2\ آ}{ب\ ل^2}$$



شکل ۱۴۰



شکل ۱۴۱

$\frac{\text{ے}}{\text{م}} = \frac{۵}{۲}$ لینے سے اور $\text{آ} = \text{ب گ}^{۲}$ رکھنے سے

$$\frac{\text{صا}}{\text{صہ}} = ۳۰\ \text{بہ}\ \frac{\text{گ}^{۲}}{\text{ل}^{۲}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

(۲) مسلسل لداؤ۔

اس صورت میں $\text{صا} = \frac{\text{بہ}}{\text{ب م}} \times \frac{\text{و ل}}{۸}$

اور $\text{صہ} = \frac{۵\ \text{و ل}^{۳}}{۳۸۴\ \text{آ ے}}$

$$\therefore \frac{\text{صا}}{\text{صہ}} = \frac{۴۸\ \text{بہ}}{۵} \times \frac{\text{ے}}{\text{م}} \times \frac{\text{آ}}{\text{ب ل}^{۲}}$$

حسب سابق $\frac{\text{ے}}{\text{م}} = \frac{۵}{۲}$ لینے سے

$$\frac{\text{صا}}{\text{صہ}} = ۲۴\ \text{بہ}\ \frac{\text{گ}^{۲}}{\text{ل}^{۲}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

مستطیلی تراش کے لیے بہ = ۱٫۵ اور $\text{گ}^{۲} = \frac{\text{ھ}^{۲}}{۱۲}$، جہاں ھ شہتیر کی گہرائی ہے۔

اس طرح (۲) ہوجاتا ہے $\frac{\text{صا}}{\text{صہ}} = ۳٫۷۵ \left(\frac{\text{ھ}}{\text{ل}}\right)^{۲}$

اور (۳) " $\frac{\text{صا}}{\text{صہ}} = ۳ \left(\frac{\text{ھ}}{\text{ل}}\right)^{۲}$

اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر $\frac{\text{ھ}}{\text{ل}} = \frac{۱}{۱۰}$ تو جز کی وجہ سے انصراف ان دو صورتوں میں خماؤ کے معیار سے پیدا ہونے والے انصراف کا علی الترتیب ۳٫۷۵ فیصدی اور ۳ فیصدی ہوگا۔

اس طرح دیکھو اگر ٹھوس مستطیلی شہتیروں میں فصل گہرائی کے ۱۰ گنے سے زیادہ ہو تو جز سے پیدا ہونے والے انصراف کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔
لیکن یہ یاد رہے کہ بھیلی کڑیوں، تختہ گرڈروں، وغیرہ، کی ایسی تراشوں میں

جو فصل کے لحاظ سے خاصے گہرے ہوں جز کا انصراف قابلِ لحاظ ہوگا۔ پلوں کے انجنیروں نے اکثر بیان کیا ہے کہ پلوں کا انصراف محسوبہ انصراف سے زیادہ ہوتا ہے۔ اس کی وجہ کسی حد تک برپوٹ دار جوڑوں کا ڈھیلا پڑجانا ہے لیکن اگر محسوبہ انصراف میں جز کا انصراف شامل رکھا جائے تو حقیقی انصراف محسوبہ انصراف سے اتنا مختلف نہیں ہوگا جتنا کہ ہوتا ہے۔ بعض لوگوں کا خیال ہے کہ اگر انصراف کے معمولی ضابطہ میں اسے کی قیمت ۲۵۰۰۰ کی بجائے ۱۰۰۰۰ ٹن فی مربع انچ لی جائے تو جز کی رعایت ہو جائیگی۔

اس کا بھی خیال رہے کہ ہم نے اعظم جزی زور کے فساد پر غور کیا ہے حالانکہ جز متغیر ہوتا ہے۔ اس طرح نتیجہ حقیقی سے کسی قدر زیادہ حاصل ہوتا ہے لیکن اوسط جزی زور لینے سے یہی بہتر ہے۔

جز وغیرہ کی وجہ سے شہتیر کی تراش میں مروڑ

خماؤ کے معیار اور شہتیر کے زوروں کے درمیان ربط معلوم کرتے وقت برنولی کے مفروضہ کا استعمال کیا گیا یعنی کہ تراش خمیدگی کے بعد بھی مستوی رہتی ہے۔

تراش کو مروڑ دینے والے دو اسباب ہیں: (۱) جزی زور (۲) ریشوں کے بڑھنے کی وجہ سے جانبی[س] فشار پیدا ہوتے ہیں ان کا غیر یکساں ہونا۔

ایک شہتیر کی دو تراشوں پر غور کرو جو باہمی فاصلہ لا پر ہوں (شکل ۱۲۱) اور فرض کرو کہ ان پر خماؤ کے معیار م اور م۱ ہیں۔ مرکزی خط سے فاصلہ ما پر دو نقطوں ط اور ط۱ پر غور کرو۔ دونوں پر تراش ایک ہی ہے۔

تب ط پر زور = م ما / آ

اور ط۱ پر = م۱ ما / آ

∴ ط پر جانبی فشاری فساد = عا × م ما / آ ے

lateral ـس

$$\text{ط}_{\text{ا}} = \text{عا} \times \frac{\text{م}_{\text{ا}}\ \text{ما}}{\text{آ ے}}$$

کیونکہ طولی فساد = $\frac{\text{زور}}{\text{ے}}$ اور جانبی یا عرضی[۵] فساد = عا × طولی فساد

∴ جانبی فشاری فساد کا فرق = $\frac{\text{عا}}{\text{آ ے}} (\text{م}_{\text{ا}} - \text{م})\ \text{ما}$

∴ تراش کے ایک چھوٹے طول فرما پر جانبی فشار کا فرق

$$= \text{ط ط}_{\text{ا}} = \frac{\text{عا}}{\text{آ ے}} (\text{م}_{\text{ا}} - \text{م})\ \text{ما فرما}$$

∴ $\text{عہ} = \text{ط ط}_{\text{ا}}$ کا ڈھال $= \frac{\text{ط ط}_{\text{ا}}}{\text{لا}} = \frac{\text{عا}}{\text{آ ے}} \times \frac{\text{م}_{\text{ا}} - \text{م}}{\text{لا}} \times \text{ما فرما}$

لیکن لا بہت چھوٹا ہو تو $\frac{\text{م}_{\text{ا}} - \text{م}}{\text{لا}}$ = جزی قوت ق

$$\therefore \quad \text{عہ} = \frac{\text{عا}}{\text{آ ے}} \times \text{ق} \times \text{ما فرما}$$

کسی تراش کے اور ایسے خط کے درمیان جو ابتدا میں مرکزی خط کے متوازی تھا زاویہ کی تبدیلی معلوم کرنے کے لیے زاویہ کی ان چھوٹی چھوٹی تبدیلیوں کو جمع کرنا ہوگا۔

∴ مجموعی تبدیلی $= \text{ط} = \frac{\text{ق} \times \text{عا}}{\text{آ ے}} \int \text{ما فرما}$

$$= \frac{\text{ق عا ما}^{2}}{\text{۲ آ ے}} = \frac{\text{س عا ما}^{2}}{\text{۲ ے گ}^{2}}$$

کیونکہ $\text{س} = \frac{\text{ق}}{\text{ب}}$

یہ ہم پہلے دکھا چکے ہیں کہ جزکی وجہ سے زاویہ کی تبدیلی $\frac{\text{س . ب . ما}}{\text{۲ م . ض گ}}$ ہوتی ہے

۵ lateral or transverse

∴ دونوں اسباب کی وجہ سے مجموعی تبدیلی

$$= \frac{\text{س}}{\text{گ}^{۲}}\left(\frac{\text{ب ما}}{\text{ض م}} + \frac{\text{عا ما}^{۲}}{۲\,\text{ے}}\right)$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{م گ}^{۲}}\left(\frac{\text{ب ما}}{\text{ض}} + \frac{\text{عا ما}^{۲}\,\text{م}}{۲\,\text{ے}}\right)$$

ے $= \frac{۵}{۲}$ م اور عا $= \frac{۱}{۴}$ رکھنے سے یہ تبدیلی

$$= \frac{\text{س}}{\text{م گ}^{۲}}\left(\frac{\text{ب ما}}{\text{ض}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{۲۰}\right)$$

اس ربط سے تراش کے کسی حصے پر ڈھال معلوم کیا جا سکتا ہے اور تراش کی بگڑی ہوئی شکل حاصل ہو سکتی ہے۔ اس دلچسپ مسئلے کی مزید بحث ہماری کتاب کی وسعت سے باہر ہے لیکن یہاں جو کچھ بتایا گیا ہے وہ یہ واضح کرنے کے لیے کافی ہے کہ اس سے بحث کس طرح کی جائیگی۔

شہتیروں کے جزء، خماؤ، اور انحراف کا خلاصہ
(فصل ل)

شہتیر کی قسم	بوجھ	اعظم جزء = ن ل	اعظم خماؤ کا معیار = م × و ل	اعظم انحراف = ر × و ل۳ / آ سے
		ن	م	ر
آزادانہ سہارا ہوا	یکساں	۱/۲	۱/۸	۵/۳۸۴
"	مرکزی	۱/۲	۱/۴	۱/۴۸
ثابت	یکساں	۱/۲	۱/۱۲	۱/۳۸۴
"	مرکزی	۱/۲	۱/۸	۱/۱۹۲
برآمدہ بیرم	یکساں	۱	۱/۲	۱/۸
"	سرے پہ	۱	۱	۱/۳

حصۂ اوّل تمام شد

فہرست اصطلاحات

تعمیروں کا نظریہ اور تجویز

حصۂ اول

اُردو	انگریزی
	A
بادپیما	Anemometer
غیر متشاکل تراش	Asymmetrical section
	B
شہتیر	Beam
مسند	Bearing
خماؤ	Bending
شکستی زور	Breaking stress
خمیدگی	Buckling
دربستہ	Built-in
ساختہ	Built-up
الصاقی جوڑ	Butt joint
	C
برآمدہ بیرم	Cantilever
مرکز سنبہ	Centre-punch
مرکز ہندسی	Centroid
کلیٹی رابطے	Cleat connections
مزدوج قطر	Conjugate diameter
انعطاف۔ تعاکس خمیدگی	Contraflexure
آنکھ تراش سر	Countersunk head
ڈھکن تختی۔ ڈھانک تختی	Cover plate
حمالہ	Crane
	D
مردہ بوجھ	Dead load
انصراف	Deflection
تقسیم	Distribution
دوہرا جز	Double shear
تمدد	Ductility

انگریزی	اُردو
Dynamic formula	حرکیاتی ضابطہ
E	
Elasticity	لچک
Elevation	رُوکار
Ellipse	ناقص
Extensometer	امتدادپیما۔ تمددپیما
F	
Factor of safety	قدرِ سلامتی
Failure	ناکارگی
Flange	کور
Flexural rigidity	خماؤ کی استواری
Flitched beam	مرکب شہتیر
Fracture	شکستگی
Funicular polygon	ریسمانی کثیرالاضلاع
G	
Gusset plate	کلی تختی
H	
Heterogeneous	غیر متجانس
High-carbon steel	بیش کاربن فولاد
Hogging strain	حُدبی فساد
Hoisting mechanism	رفعی کل
Homogeneous	متجانس
Hydrostatics	ماسکونیات

انگریزی	اُردو
I	
Impact	ضرب۔ صدمہ۔ تصادم
Integral curve	تکملی منحنی
Intensity of stress	زور کی حدّت
Isolated load	منفرد بوجھ
J	
Jib	بازو
Joggled	چولدار۔ دندانہ دار
L	
Lap joint	آغوش جوڑ
Lateral	جانبی
Leeward side	بادپشت جانب
Lime mortar	چونا گچ
Limiting stress	انتہائی زور
Link polygon	ریسمانی کثیرالاضلاع
Loading	لداؤ
Locus	طریق
Low-carbon steel	کم کاربن فولاد
M	
Modulus	مقیاس
Moment of inertia	معیارِ جمود
N	
Neutral axis	تعدیلی محور
Normal	عمادی

انگریزی	اردو
O	
Ordinate	معین
Overhanging ends	برآویختہ سرے
P	
Pan head	کڑاہی سر
Parabola	مکافی
Permanent set	مستقل فساد
Pitch	گھائی
Pivot	چول
Planimeter	سطح پیما
Plastic body	پیکر پذیر جسم
Points of contraflexure	نقاطِ انعطاف
Polygon	کثیر الاضلاع
Principal	صدر کڑی
Pull	کھینچ
Punching machine	ٹھنپی مشین
R	
Radius of gyration	گردشی نصف قطر
Range	وسعت
Reamer	روزن کشا
Repetition	تکرار
Resilience	بازگشتگی
Resultant stress	حاصل زور
Rigidity modulus	اُستواری کا مقیاس
Riveting	ریوٹ کاری
Rolled section	بیلی تراش
Roller bearing	پھرکی مسند۔گردونہ مسند
Rolling load	دوریہ بوجھ۔متحرک بوجھ
Rosette	پھول
Rotor	گردشہ
S	
Safe load	بے خطر بوجھ
Sagging strain	قعری فساد
Secondroid	ثانویہ
Settlement	بٹھاؤ
Shear	جز
Single shear	اکہرا جز
Snap head	گول سر
Span	فصل
Specimen	نمونہ
Stability	قائمیت۔قائم پذیری
Stanchion	کھم
Static stress	سکونی زور
Steelyard	گز۔تنک
Strain	فساد
Stress	زور
Strut	داب روک
Suction pressure	چوس دباؤ

انگریزی	اُردو
Sum curve	حاصل جمع منحنی
T	
Tensile stress	تنشی زور
Tension flange	تناؤ کور
Testing machine	امتحانی مشین۔ جانچ کل
Third lines	تہائی خطوط۔ تثلیثی خطوط
Tie bar	بندھن سلاخ
Timber	چوبینہ
Torsion	مروڑ
Tracing paper	چربہ کاغذ
Transverse strain	عرضی فساد
Trapezium	منحرف
Trestle table	گھوڑی میز
U	
Uniform load	یکساں بوجھ
V	
Vector polygon	سمتی کثیر الاضلاع
W	
Working stress	کامی زور
Y	
Yield point	نقطۂ مغلوبیت
Z	
Zig-zag	کج مج۔ لہریا

اشاریہ

تعمیروں کا نظریہ اور تجویز

(حصۂ اوّل)

اغلاط نامہ

تعبیروں کا نظریہ اور تجویز

(حصۂ اول)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۵	۱۰	نقسہ	نقشہ	۴۹	۱۳	ے ب / ے ب	ے ب / ے ب ا
۷	شکل ۲ بالائی	مـ ی	مقامی	۵۱	۱۸	سمینٹی	سیمنٹی
〃	〃	ج	جٖ	۵۷	۱۴	مُم	وُم
〃	〃 〃 زیریں	ا	ا ز	۶۵	۱۴	کرسے	کرسنے
۹	۴	امتداد بیما	امتداد پیما	۸۴	۴	وسرا	دوسرا
۱۰	شکل ۳	۵	۵۰۰	۱۲۲	۱۹	تخثیوں	تختیوں
۱۱	۱۷	کوی	کوئی	۱۲۴	۱۳	رریٹوں	ریوٹوں
۱۲	پیشانی	باب ۳	باب ۱	۱۳۵	جدول میں	L اور I	ـا اور]
۱۳	۱۱	ممال	مماثل	۱۴۳	میں شکل ①	و	ولا
〃	۲۰	حائے	جائے	۱۴۴	۱۱	مد	مط
۱۵	۱۱	۲۱ ر / ۲۱	۲۱ ز / ۲۱	۱۴۷	۹	مکانی	مکافی
۳۱	۱	نظرانذر	نظرانداز	۱۶۶	۱۳	جاتی	جاتی
۳۸	۱۴	ہونے	ہوئے	۱۶۸ / ۱۶۹	پیشانی	منحنی	منحنی
۳۹	پیشانی	باب ۲	باب ۱	۱۷۲	۱۸	دیا جائیگا	پایا جائیگا

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۸۲	۹	کانوں	کمانوں	۳۳۶	۵	$\frac{\text{م ل}}{\text{۶}}$	$\frac{\text{م}^{\text{۲}}\text{ل}_{\text{۱}}}{\text{۶}}$
۱۹۵	۶	تراش	تراش	۳۴۹	شکل ۱۰۶ د		$\frac{\text{ل}_{\text{۱}}}{\text{۳}}\ \text{س}_{\text{۱}}$
۱۹۸	۲	فشاری	فشاری	۳۵۸	۵	$\frac{\text{ل}_{\text{۱}}\text{ف}_{\text{۲}}}{\text{ل}_{\text{۲}}\text{ف}_{\text{۲}}}$	$\frac{\text{ل}_{\text{۱}}\text{ف}_{\text{۲}}}{\text{ل}_{\text{۲}}\text{ف}_{\text{۱}}}$
۱۹۹	۳	$\text{۳۰}\times\text{۱-}^{\text{۶}}$	$\text{۳۰}\times\text{۱۰}^{\text{۶}}$				
۲۳۷	شکل ۸۲ کے اندر دائیں جانب	ب	$\text{ب}_{\text{۱۰}}$	۳۶۰	شکل ۱۰۹ دائیں جانب	۱۲	۲۱
۲۴۴	۲۱	عمل	محل	۳۶۲	شکل ۱۱۰ بائیں		$\frac{\text{ل}}{\text{۴}}$
۲۴۶	۱۴	$\frac{\text{۱}}{\text{ل}^{\text{۲}}}$	$\frac{\text{۱}}{\text{ل}}$				$\frac{\text{ب ل}^{\text{۲}}}{\text{۸}}$
۲۴۹	۱۲	بجویز	تجویز				$\frac{\text{۵}}{\text{۸}}\ \text{ب ل}$
״	۲۳	زیزبحث	زیر بحث	۳۷۰	۱۶	ایک طول	ایک کا طول
۲۵۰	شکل ۸۳ کے نیچے دائیں جانب	$\text{ف}_{\text{۱۰}}$	$\text{ف}_{\text{۱}}$	۳۷۱	۳	۲مہ ب	۲مہ ب
۲۸۰	۷	اَب	اب	״	۱۰	$(\text{ل}_{\text{۱}}^{\text{۳}} - \text{ل}_{\text{۲}}^{\text{۳}})$	$(\text{ل}_{\text{۱}}^{\text{۳}} + \text{ل}_{\text{۲}}^{\text{۳}})$
۲۸۸	شکل کے نیچے	شکل ۱۹۳ ۱	شکل ۹۳ ۲	״	۱۲	$(\text{۱ل} - \text{۲ل}_{\text{۱}} + \text{۲ل}_{\text{۱}})$	$(\text{۳ل} - \text{۶ل}_{\text{۱}} + \text{۲ل}_{\text{۱}})$
۲۹۶	۱۱	$\frac{\text{۱}}{\text{۱۲۰۰}}$	$\frac{\text{۱}}{\text{۱۲۰۰}}$	۳۸۶	شکل ۱۱۹ (دائیں) اوپر		جا
״	۱۴	اطول	طول	۳۸۸	۴	کی صورتوں	کی خاص صورتوں
۳۰۴	۱	نہ	یہ				